Repetytorium z matematyki

Definicja liczb zespolonych

Wyrażenie $a + bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi a i spełnia zależność $i^2 = -1$, nazywamy liczbą zespoloną. Liczbę i nazywamy jednostką urojoną, a iloczyn bi liczbą urojoną. Liczby rzeczywiste a i b nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby zespolonej.

Porównywanie oraz działania na liczbach zespolonych

Dla dowolnych liczb zespolonych $(a + bi)$ i $(c + di)$ mamy:

1. (równość) $(a + bi) = (c + di) \iff a = c \quad \text{i} \quad b = d$
2. (dodawanie) $(a + bi) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$
3. (odejmowanie) $(a + bi) - (c + id) = (a - c) + (b - d)i$
4. (mnożenie) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Uwaga. W zbiorze liczb zespolonych nie można określić relacji mniejszości.

Definicja liczb zespolonych

Wyrażenie $a+bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi a i spełnia zależność $i^2=-1$, nazywamy liczbą zespoloną. Liczbę i nazywamy jednostką urojoną, a iloczyn bi liczbą urojoną. Liczby rzeczywiste a i b nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby zespolonej.

Porównywanie oraz działania na liczbach zespolonych

Dla dowolnych liczb zespolonych $(a+bi)$ i $(c+di)$ mamy:

1. (równość) $\quad (a+bi)=(c+di) \iff a=c \text{ i } b=d$
2. (dodawanie) $\quad (a+bi)+(c+id) = (a+c)+(b+d)i$
3. (odejmowanie) $\quad (a+bi)-(c+id) = (a-c)+(b-d)i$
4. (mnożenie) $\quad (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Uwaga. W zbiorze liczb zespolonych nie można określić relacji mniejszości.

Definicja liczb zespolonych

Wyrażenie $a+bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi a i spełnia zależność $i^2=-1$, nazywamy liczbą zespoloną. Liczbę i nazywamy jednostką urojoną, a iloczyn bi liczbą urojoną. Liczby rzeczywiste a i b nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby zespolonej.

Porównywanie oraz działania na liczbach zespolonych

Dla dowolnych liczb zespolonych $(a+bi)$ i $(c+di)$ mamy:

1. (równość) $\quad (a+bi)=(c+di) \iff a=c$ i $b=d$
2. (dodawanie) $\quad (a+bi)+(c+id) = (a+c)+(b+d)i$
3. (odejmowanie) $\quad (a+bi)-(c+id) = (a-c)+(b-d)i$
4. (mnożenie) $\quad (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Uwaga. W zbiorze liczb zespolonych nie można określić relacji mniejszości.

Zespolone pierwiastki równania kwadratowego

Dane jest równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ o wyróżniku $\Delta < 0$.

Pierwiastkami tego równania są liczby zespolone $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Operacje jednoargumentowe

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$ określamy liczbę zespoloną sprzężoną: $\bar{z} = a - bi$. Modułem liczby zespolonej z nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definiujemy operatory: część rzeczywista $\Re\mathrm{e}(z) = a$ i część urojona $\Im\mathrm{m}(z) = b$.

Dzielenie liczb zespolonych

Niech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Podzielić liczbę zespoloną z_1 przez liczbę zespoloną $z_2 \neq 0$ znaczy znaleźć taką liczbę z_3, aby iloczyn $z_2 \cdot z_3$ równał się liczbie z_1. Dzielenie przez 0 jest nieokreślone. Liczbę z_3 obliczamy następująco:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Zespolone pierwiastki równania kwadratowego

Dane jest równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ o wyróżniku $\Delta < 0$. Pierwiastkami tego równania są liczby zespolone $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Operacje jednoargumentowe

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$ określamy liczbę zespoloną sprzężoną: $\bar{z} = a - bi$. Modułem liczby zespolonej z nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Definiujemy operatory: część rzeczywista $\Re\mathrm{e}(z) = a$ i część urojona $\Im\mathrm{m}(z) = b$.

Dzielenie liczb zespolonych

Niech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Podzielić liczbę zespoloną z_1 przez liczbę zespoloną $z_2 \neq 0$ znaczy znaleźć taką liczbę z_3, aby iloczyn $z_2 \cdot z_3$ równał się liczbie z_1. Dzielenie przez 0 jest nieokreślone. Liczbę z_3 obliczamy następująco:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Zespolone pierwiastki równania kwadratowego

Dane jest równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ o wyróżniku $\Delta < 0$.

Pierwiastkami tego równania są liczby zespolone $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Operacje jednoargumentowe

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$ określamy liczbę zespoloną sprzężoną: $\bar{z} = a - bi$. Modułem liczby zespolonej z nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Definiujemy operatory: część rzeczywista $\Re\mathrm{e}(z) = a$ i część urojona $\Im\mathrm{m}(z) = b$.

Dzielenie liczb zespolonych

Niech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Podzielić liczbę zespoloną z_1 przez liczbę zespoloną $z_2 \neq 0$ znaczy znaleźć taką liczbę z_3, aby iloczyn $z_2 \cdot z_3$ równał się liczbie z_1. Dzielenie przez 0 jest nieokreślone. Liczbę z_3 obliczamy następująco:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Argument Liczby zespolonej

$z = a + bi \neq 0$ to każda liczba rzeczywistą $\phi \in (-\pi, \pi\rangle$ określoną równaniami:

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\phi = \frac{b}{|z|}.$$

Postać trygonometryczna

Każda liczba zespolona z daje się przedstawić w postaci

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Wzory de Moivre'a

Dla każdej liczby rzeczywistej ϕ i każdej liczby naturalnej k zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right] \\ z^k &= r^k(\cos k\phi + i\sin k\phi) \end{aligned}$$

Argument Liczby zespolonej

$z = a + bi \neq 0$ to każda liczba rzeczywistą $\phi \in (-\pi, \pi\rangle$ określoną równaniami:

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\phi = \frac{b}{|z|}.$$

Postać trygonometryczna

Każda liczba zespolona z daje się przedstawić w postaci

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Wzory de Moivre'a

Dla każdej liczby rzeczywistej ϕ i każdej liczby naturalnej k zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\right] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right] \\ z^k &= r^k(\cos k\phi + i\sin k\phi) \end{aligned}$$

Argument Liczby zespolonej

$z = a + bi \neq 0$ to każda liczba rzeczywistą $\phi \in (-\pi, \pi\rangle$ określoną równaniami:

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\phi = \frac{b}{|z|}.$$

Postać trygonometryczna

Każda liczba zespolona z daje się przedstawić w postaci

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Wzory de Moivre'a

Dla każdej liczby rzeczywistej ϕ i każdej liczby naturalnej k zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\right] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right] \\ z^k &= r^k(\cos k\phi + i\sin k\phi) \end{aligned}$$

Pierwiastek arytmetyczny

Jeżeli $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, to pierwiastki n-tego stopnia liczby z mają postać

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Wzór Eulera

Dla każdej liczby rzeczywistej ϕ zachodzi równość:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Postać wykładnicza

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci

$$z = |z| \cdot e^{i\phi}.$$

Pierwiastek arytmetyczny

Jeżeli $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, to pierwiastki n-tego stopnia liczby z mają postać

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Wzór Eulera

Dla każdej liczby rzeczywistej ϕ zachodzi równość:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Postać wykładnicza

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci

$$z = |z| \cdot e^{i\phi}.$$

Pierwiastek arytmetyczny

Jeżeli $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, to pierwiastki n-tego stopnia liczby z mają postać

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Wzór Eulera

Dla każdej liczby rzeczywistej ϕ zachodzi równość:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Postać wykładnicza

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci

$$z = |z| \cdot e^{i\phi}.$$

$f(x)$	$f'(x)$	Dziedzina
c	0	$\mathcal{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathcal{R},\ n \in \mathcal{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathcal{R},\ a > 0$
e^x	e^x	$\mathcal{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathcal{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathcal{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathcal{C}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathcal{C}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

$f(x)$	$f'(x)$	Dziedzina
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathcal{R}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathcal{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathcal{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathcal{R}$
$\mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathcal{R}$
$\mathrm{ctgh}\, x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$	$\mathcal{R}$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na pochodnych

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne na pewnym zbiorze $\mathcal{X}$, to

- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- $[kf(x)]' = kf'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

Jeżeli funkcja $u = \phi(x)$ ma na pewnym zbiorze $\mathcal{X}$ pochodną $\phi'(x)$ oraz funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(x)$ na przeciwdziedzinie funkcji ϕ, to funkcja złożona $f(\phi(x))$ ma na zbiorze $\mathcal{X}$ pochodną

$$[f(\phi(x))]' = f'(u) \cdot \phi'(x) \qquad \text{lub} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Jeżeli funkcja $x = g(y)$ jest ściśle monotoniczna i ma pochodną $g'(y) \neq 0$ w dziedzinie $\mathcal{Y}$, to funkcja $y = f(x)$, odwrotna do niej ma w przeciwdziedzinie $\mathcal{X}$ funkcji $g(y)$ pochodną $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ przy czym y oznacza wartości funkcji f w punkcie x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

Jeżeli funkcja $u = \phi(x)$ ma na pewnym zbiorze $\mathcal{X}$ pochodną $\phi'(x)$ oraz funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(x)$ na przeciwdziedzinie funkcji ϕ, to funkcja złożona $f(\phi(x))$ ma na zbiorze $\mathcal{X}$ pochodną

$$[f(\phi(x))]' = f'(u) \cdot \phi'(x) \qquad \text{lub} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Jeżeli funkcja $x = g(y)$ jest ściśle monotoniczna i ma pochodną $g'(y) \neq 0$ w dziedzinie $\mathcal{Y}$, to funkcja $y = f(x)$, odwrotna do niej ma w przeciwdziedzinie $\mathcal{X}$ funkcji $g(y)$ pochodną $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ przy czym y oznacza wartości funkcji f w punkcie x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Definicja 1

Niech $\mathcal{X}$ oznacza dowolny przedział, zaś $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ funkcję określoną na tym przedziale. Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $\mathcal{X}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} F'(x) = f(x).$$

Definicja 2

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $\mathcal{X}$. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f w przedziale $\mathcal{X}$ nazywamy całką nieoznaczoną funkcji f w tym przedziale i oznaczamy symbolem

$$\int f(x)\, dx.$$

Jeżeli $F(x)$ jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $\mathcal{X}$, C dowolną stałą, to mamy

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	C	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$
1	$x+C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq 1$	e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$	$\arcsin x + C$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$

Własności całki nieoznaczonej

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają funkcje pierwotne w przedziale $\mathcal{X}$, to funkcje $f(x)+g(x)$ oraz $c\,f(x)$, gdzie c oznacza dowolną stałą, mają także funkcje pierwotne, przy czym

$$\begin{aligned} \int [f(x)+g(x)]\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \\ \int c\,f(x)\,dx &= c\int f(x)\,dx \end{aligned}$$

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Jeżeli funkcje $u(x)$ i $v(x)$ mają w pewnym przedziale $\mathcal{X}$ ciągłe pochodne $u'(x)$ i $v'(x)$, to w tym przedziale zachodzi

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie

Jeżeli

1. funkcja $t = h(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $\mathcal{X}$ i odwzorowuje go na przedział $\mathcal{T}$,
2. funkcja $g(t)$ ma na przedziale $\mathcal{T}$ funkcję pierwotną $G(t)$,
3. dla każdego $x \in \mathcal{X}$ $f(x) = g[h(x)]\,h'(x)$,

to całka nieoznaczona funkcji $f(x)$ w przedziale $\mathcal{X}$ wyraża się wzorem

$$\int f(x)\,dx = G\,[h(x)] + C.$$

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $< a, b >$. Wtedy

I. Jeśli funkcja P jest zdefiniowana wzorem

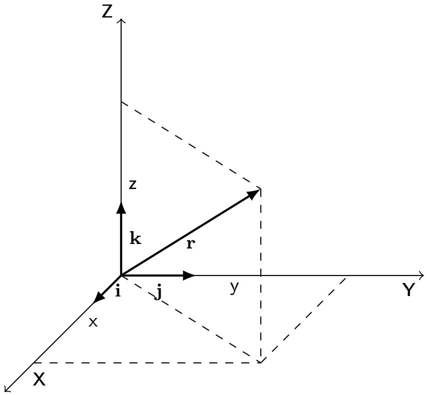
$$P(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

dla wszystkich $x \in < a, b >$, to P jest funkcją pierwotną funkcji f na tym przedziale.

II. Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b\,.$$

Repetytorium z fizyki klasycznej



$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Iloczyn stałej i wektora

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_x &= c\,A_x \\ B_y &= c\,A_y \\ B_z &= c\,A_z \end{aligned}$$

Suma wektorów

Różnica wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Iloczyn stałej i wektora

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_x &= c\,A_x \\ B_y &= c\,A_y \\ B_z &= c\,A_z \end{aligned}$$

Suma wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

Różnica wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Iloczyn stałej i wektora

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_x &= c\,A_x \\ B_y &= c\,A_y \\ B_z &= c\,A_z \end{aligned}$$

Suma wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

Różnica wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Iloczyn stałej i wektora

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_x &= c\,A_x \\ B_y &= c\,A_y \\ B_z &= c\,A_z \end{aligned}$$

Suma wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

Różnica wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Iloczyn stałej i wektora

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_x &= c\,A_x \\ B_y &= c\,A_y \\ B_z &= c\,A_z \end{aligned}$$

Suma wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

Różnica wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Iloczyn stałej i wektora

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_x &= c\,A_x \\ B_y &= c\,A_y \\ B_z &= c\,A_z \end{aligned}$$

Suma wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

Różnica wektorów

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB \cos \phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB\cos\phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\left.\begin{aligned} C_x &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} \\ C_y &= (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} \\ C_z &= (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \end{aligned}\right\}$$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB\cos\phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} C_x & = & (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} \\ C_y & = & (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} \\ C_z & = & (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k} \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k}$$

Długość wektora iloczynu wektorowego: $C = AB\sin\phi$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB \cos \phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} C_x & = & (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} \\ C_y & = & (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} \\ C_z & = & (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k} \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k}$$

Długość wektora iloczynu wektorowego: $C = AB \sin \phi$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB \cos \phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} C_x & = & (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} \\ C_y & = & (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} \\ C_z & = & (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k} \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k}$$

Długość wektora iloczynu wektorowego: $C = AB \sin \phi$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB \cos\phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} C_x & = & (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} \\ C_y & = & (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} \\ C_z & = & (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k} \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k}$$

Długość wektora iloczynu wektorowego: $C = AB \sin\phi$

Iloczyn skalarny

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Długość wektora iloczynu skalarnego: $C = AB \cos \phi$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} C_x & = & (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} \\ C_y & = & (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} \\ C_z & = & (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k} \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k}$$

Długość wektora iloczynu wektorowego: $C = AB \sin \phi$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}' = A_x'\,\mathbf{i} + A_y'\,\mathbf{j} + A_z'\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}'' = A_x''\,\mathbf{i} + A_y''\,\mathbf{j} + A_z''\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}' = A_x'\,\mathbf{i} + A_y'\,\mathbf{j} + A_z'\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}'' = A_x''\,\mathbf{i} + A_y''\,\mathbf{j} + A_z''\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}' = A'_x\,\mathbf{i} + A'_y\,\mathbf{j} + A'_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}'' = A''_x\,\mathbf{i} + A''_y\,\mathbf{j} + A''_z\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{grad}\phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}' = A'_x\,\mathbf{i} + A'_y\,\mathbf{j} + A'_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}'' = A''_x\,\mathbf{i} + A''_y\,\mathbf{j} + A''_z\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{grad}\phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}' = A'_x\,\mathbf{i} + A'_y\,\mathbf{j} + A'_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}'' = A''_x\,\mathbf{i} + A''_y\,\mathbf{j} + A''_z\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{grad}\phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}' = A'_x\,\mathbf{i} + A'_y\,\mathbf{j} + A'_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}'' = A''_x\,\mathbf{i} + A''_y\,\mathbf{j} + A''_z\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{grad}\phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Różniczkowanie wektora

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}' = A_x'\,\mathbf{i} + A_y'\,\mathbf{j} + A_z'\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}'' = A_x''\,\mathbf{i} + A_y''\,\mathbf{j} + A_z''\,\mathbf{k}$$

Nabla i gradient

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{grad}\phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Wektor położenia

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Wektor prędkości

Wektor przyśpieszenia

Wektor położenia

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\ \vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \end{aligned}$$

Wektor prędkości

Wektor przyśpieszenia

Wektor położenia

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\ \vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \end{aligned}$$

Wektor prędkości

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Wektor przyśpieszenia

Wektor położenia

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Wektor prędkości

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$$

Wektor przyśpieszenia

Wektor położenia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\
\vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Wektor prędkości

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Wektor przyśpieszenia

Wektor położenia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\
\vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Wektor prędkości

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Wektor przyśpieszenia

Wektor położenia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\
\vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Wektor prędkości

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Wektor przyśpieszenia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \\
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

Wektor położenia

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\ \vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \end{aligned}$$

Wektor prędkości

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Wektor przyśpieszenia

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a} &= \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} \end{aligned}$$

Wektor położenia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\
\vec{r} &= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Wektor prędkości

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\
\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Wektor przyśpieszenia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \\
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

Pęd

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} = m\,\dot{\mathbf{r}}$$

Moment pędu

Pęd

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} = m\,\dot{\mathbf{r}}$$

Moment pędu

Pęd

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} = m\,\dot{\mathbf{r}}$$

Moment pędu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\begin{aligned} M_x &= y\,p_z - z\,p_y \\ M_y &= z\,p_x - x\,p_z \\ M_z &= x\,p_y - y\,p_x \end{aligned}$$

Pęd

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} = m\,\dot{\mathbf{r}}$$

Moment pędu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

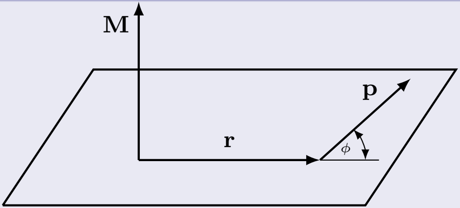
$$\begin{aligned} M_x &= y\,p_z - z\,p_y \\ M_y &= z\,p_x - x\,p_z \\ M_z &= x\,p_y - y\,p_x \end{aligned}$$

Pęd

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} = m\,\dot{\mathbf{r}}$$

Moment pędu

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\
M_x &= y\,p_z - z\,p_y \\
M_y &= z\,p_x - x\,p_z \\
M_z &= x\,p_y - y\,p_x
\end{aligned}$$



Energia kinetyczna

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Funkcja Hamiltona

Energia kinetyczna

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Funkcja Hamiltona

Energia kinetyczna

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Funkcja Hamiltona

$$H = T + U$$

Energia kinetyczna

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Funkcja Hamiltona

$$H = T + U$$

Np.

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\,g\,z$$

Energia kinetyczna

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Funkcja Hamiltona

$$H = T + U$$

Np.

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\,g\,z$$

Energia kinetyczna

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Funkcja Hamiltona

$$H = T + U$$

Np.

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\, g\, z$$

Współrzędne środka masy dwóch cząstek

$$X = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$$
$$Y = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$
$$Z = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2)$$

gdzie $M = m_1 + m_2$

Współrzędne względne

$$x = x_2 - x_1$$
$$y = y_2 - y_1$$
$$z = z_2 - z_1$$

Masa zredukowana

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Współrzędne środka masy dwóch cząstek

$$X = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right)$$
$$Y = \frac{1}{M}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2\right)$$
$$Z = \frac{1}{M}\left(m_1 z_1 + m_2 z_2\right)$$

gdzie $M = m_1 + m_2$

Współrzędne względne

$$x = x_2 - x_1$$
$$y = y_2 - y_1$$
$$z = z_2 - z_1$$

Masa zredukowana

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Współrzędne środka masy dwóch cząstek

$$X = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$$
$$Y = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$
$$Z = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2)$$

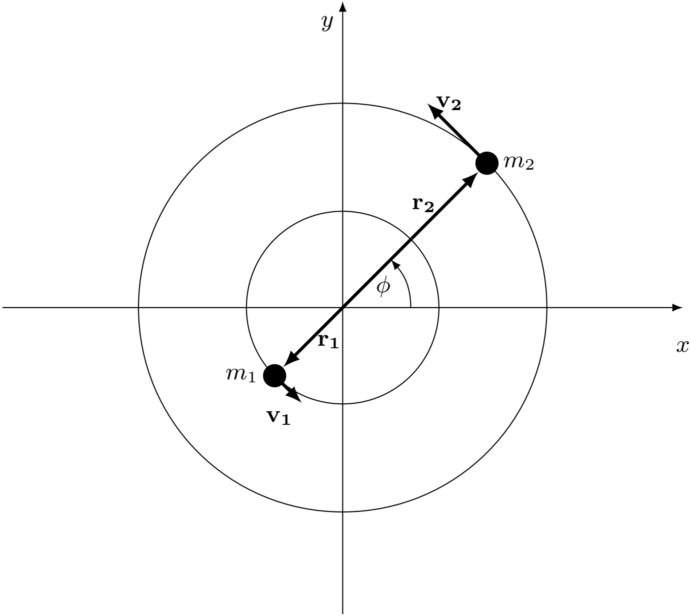
gdzie $M = m_1 + m_2$

Współrzędne względne

$$x = x_2 - x_1$$
$$y = y_2 - y_1$$
$$z = z_2 - z_1$$

Masa zredukowana

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$$


y
$\mathbf{v_2}$
m_2
$\mathbf{r_2}$
ϕ
$\mathbf{r_1}$
x
m_1
$\mathbf{v_1}$

Prędkość kątowa

$$\omega = \dot{\phi}$$

Moment bezwładności

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I = \mu r^2$$

dla $r = r_1 + r_2$

Wartość momentu pędu

$$M = I\omega$$

Energia rotacji

$$T = \frac{M^2}{2I}$$

Prędkość kątowa

$$\omega = \dot{\phi}$$

Moment bezwładności

$$I = m_1 \, r_1^2 + m_2 \, r_2^2$$
$$I = \mu \, r^2$$

dla $r = r_1 + r_2$

Wartość momentu pędu

$$M = I \, \omega$$

Energia rotacji

$$T = \frac{M^2}{2I}$$

Prędkość kątowa

$$\omega = \dot{\phi}$$

Moment bezwładności

$$I = m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2$$
$$I = \mu\, r^2$$

dla $r = r_1 + r_2$

Wartość momentu pędu

$$M = I\,\omega$$

Energia rotacji

$$T = \frac{M^2}{2I}$$

Prędkość kątowa

$$\omega = \dot{\phi}$$

Moment bezwładności

$$I = m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2$$
$$I = \mu\, r^2$$

dla $r = r_1 + r_2$

Wartość momentu pędu

$$M = I\,\omega$$

Energia rotacji

$$T = \frac{M^2}{2I}$$

Siła

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, V$$

Równania Newtona

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\,\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\,\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned}$$

Ruch harmoniczny

$$m\,\ddot{x} = -k\,x(t)$$

Siła

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, V$$

Równania Newtona

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\,\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\,\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned}$$

Ruch harmoniczny

$$m\,\ddot{x} = -k\,x(t)$$

Siła

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, V$$

Równania Newtona

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\,\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\,\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned}$$

Ruch harmoniczny

$$m\,\ddot{x} = -k\,x(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

Siła

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, V$$

Równania Newtona

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\,\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\,\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned}$$

Ruch harmoniczny

$$m\,\ddot{x} = -k\,x(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

Siła

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, V$$

Równania Newtona

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\,\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\,\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned}$$

Ruch harmoniczny

$$m\,\ddot{x} = -k\,x(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Warunek brzegowy $x(0) = a$ daje $\quad a = c_1 + c_2$
Warunek brzegowy $\dot{x}(0) = 0$ daje $\quad 0 = i\,\omega\,(c_1 - c_2)$
Otrzymujemy

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

co daje rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = a\cos(\omega t)$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Warunek brzegowy $x(0) = a$ daje $\quad a = c_1 + c_2$
Warunek brzegowy $\dot{x}(0) = 0$ daje $\quad 0 = i\,\omega\,(c_1 - c_2)$
Otrzymujemy

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

co daje rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = a\cos(\omega t)$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Warunek brzegowy $x(0) = a$ daje $\qquad a = c_1 + c_2$

Warunek brzegowy $\dot{x}(0) = 0$ daje $\qquad 0 = i\,\omega\,(c_1 - c_2)$

Otrzymujemy

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

co daje rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = a\cos(\omega t)$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Warunek brzegowy $x(0) = a$ daje $\quad a = c_1 + c_2$
Warunek brzegowy $\dot{x}(0) = 0$ daje $\quad 0 = i\,\omega\,(c_1 - c_2)$

Otrzymujemy

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

co daje rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = a\cos(\omega t)$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Warunek brzegowy $x(0) = a$ daje $\quad a = c_1 + c_2$

Warunek brzegowy $\dot{x}(0) = 0$ daje $\quad 0 = i\,\omega\,(c_1 - c_2)$

Otrzymujemy

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

co daje rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = a\cos(\omega t)$$

Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' + b\,x' + c\,x = 0$$

$$m^2 + b\,m + c = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{m_1\,t} + c_2 e^{m_2\,t}$$

Rozwiązania równań Newtona dla ruchu harmonicznego

$$m_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Warunek brzegowy $x(0) = a$ daje $\quad a = c_1 + c_2$
Warunek brzegowy $\dot{x}(0) = 0$ daje $\quad 0 = i\,\omega\,(c_1 - c_2)$
Otrzymujemy

$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$$

co daje rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = a\cos(\omega t)$$

Rzut ukośny

$$\mathbf{v}_0 = \dot{x}_0\,\mathbf{i} + \dot{z}_0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -m\,g)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{y} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & -g \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_2 + C_1\,t \\ y(t) & = & C_4 + C_3\,t \\ z(t) & = & C_6 + C_5\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{array}\right\}$$

Rzut ukośny

$$\mathbf{v}_0 = \dot{x}_0\,\mathbf{i} + \dot{z}_0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -m\,g)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{y} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & -g \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_2 + C_1\,t \\ y(t) & = & C_4 + C_3\,t \\ z(t) & = & C_6 + C_5\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \end{array}\right\}$$

Rzut ukośny

$$\mathbf{v}_0 = \dot{x}_0\,\mathbf{i} + \dot{z}_0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -m\,g)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{y} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & -g \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_2 + C_1\,t \\ y(t) & = & C_4 + C_3\,t \\ z(t) & = & C_6 + C_5\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \end{array}\right\}$$

Rzut ukośny

$$\mathbf{v}_0 = \dot{x}_0\,\mathbf{i} + \dot{z}_0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -m\,g)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{y} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & -g \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_2 + C_1\,t \\ y(t) & = & C_4 + C_3\,t \\ z(t) & = & C_6 + C_5\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \end{array}\right\}$$

Rzut ukośny, cd.

Warunki brzegowe:

$$\left.\begin{array}{lll} x(0) = 0 & y(0) = 0 & z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 & \dot{y}(0) = 0 & \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \end{array}\right\}$$

prowadzą do rozwiązań

$$\left.\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dot{x}_0\, t \\ y(t) & = & 0 \\ z(t) & = & \dot{z}_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\}$$

Tor na płaszczyźnie XZ

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}\, x - \frac{g}{2\dot{x}_0^2}\, x^2$$

Zasięg

$$x_{\max} = \frac{2\, \dot{x}_0\, \dot{z}_0}{g}$$

Wysokość maksymalna

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$$

Rzut ukośny, cd.

Warunki brzegowe:

$$\left.\begin{array}{lll} x(0)=0 & y(0)=0 & z(0)=0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 & \dot{y}(0)=0 & \dot{z}(0)=\dot{z}_0 \end{array}\right\}$$

prowadzą do rozwiązań

$$\left.\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dot{x}_0\, t \\ y(t) & = & 0 \\ z(t) & = & \dot{z}_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\}$$

Tor na płaszczyźnie XZ

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}\, x - \frac{g}{2\dot{x}_0^2}\, x^2$$

Zasięg

$$x_{\max} = \frac{2\, \dot{x}_0\, \dot{z}_0}{g}$$

Wysokość maksymalna

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$$

Rzut ukośny, cd.

Warunki brzegowe:

$$\left.\begin{array}{lll} x(0)=0 & y(0)=0 & z(0)=0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 & \dot{y}(0)=0 & \dot{z}(0)=\dot{z}_0 \end{array}\right\}$$

prowadzą do rozwiązań

$$\left.\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dot{x}_0\, t \\ y(t) & = & 0 \\ z(t) & = & \dot{z}_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\}$$

Tor na płaszczyźnie XZ

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}\, x - \frac{g}{2\dot{x}_0^2}\, x^2$$

Zasięg

$$x_{\max} = \frac{2\, \dot{x}_0\, \dot{z}_0}{g}$$

Wysokość maksymalna

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$$

Rzut ukośny, cd.

Warunki brzegowe:

$$\left.\begin{array}{lll} x(0)=0 & y(0)=0 & z(0)=0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 & \dot{y}(0)=0 & \dot{z}(0)=\dot{z}_0 \end{array}\right\}$$

prowadzą do rozwiązań

$$\left.\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dot{x}_0\, t \\ y(t) & = & 0 \\ z(t) & = & \dot{z}_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\}$$

Tor na płaszczyźnie XZ

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}\, x - \frac{g}{2\dot{x}_0^2}\, x^2$$

Zasięg

$$x_{\max} = \frac{2\,\dot{x}_0\,\dot{z}_0}{g}$$

Wysokość maksymalna

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$$

Rzut ukośny, cd.

Warunki brzegowe:

$$\left.\begin{array}{lll} x(0)=0 & y(0)=0 & z(0)=0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 & \dot{y}(0)=0 & \dot{z}(0)=\dot{z}_0 \end{array}\right\}$$

prowadzą do rozwiązań

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dot{x}_0\, t \\ y(t) & = & 0 \\ z(t) & = & \dot{z}_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array}\right\}$$

Tor na płaszczyźnie XZ

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}\, x - \frac{g}{2\dot{x}_0^2}\, x^2$$

Zasięg

$$x_{\max} = \frac{2\, \dot{x}_0\, \dot{z}_0}{g}$$

Wysokość maksymalna

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$$