Zastosowania matematyki chemia aplikacyjna

Iwona Gulaczyk i Marek Kręglewski

Program zajęć

1. Liczby
2. Czym są metody numeryczne? Tworzenie algorytmu.
3. Iteracyjne rozwiązanie równanie typu x=f(x).
4. Rozwiązywanie równań jednej zmiennej: metody bisekcji, Newtona i siecznych.
5. Całkowanie numeryczne: metody trapezów i Simpsona.
6. Różniczkowanie numeryczne.
7. Rozwinięcie funkcji w szereg.
8. Charakterystyka błędu metody numerycznej w zależności od długości kroku.
9. Ekstrapolacja Richardsona.
10. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych.
11. Wielomiany: postać naturalna, schemat Hornera.
12. Interpolacja wielomianem.

Program zajęć

13. Definicje i rodzaje macierzy. Działania na macierzach.
14. Zapis macierzowy układu równań liniowych.
15. Rozwiązanie układu równań liniowych w postaci macierzowej.
16. Wartości charakterystyczne macierzy.
17. Elementy teorii błędu – przenoszenie się błędów.
18. Optymalizacja liniowa.
19. Optymalizacja nieliniowa.

LABORATORIUM

1. Program MS Excel
2. Wykorzystanie MS Excel do rozwiązywania problemów numerycznych
3. Obliczenia z wykorzystaniem aplikacji Wolfram Alpha

LITERATURA:

1. E. Steiner, Matematyka dla chemików, WN PWN 2001.
2. A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN 1975.

Liczby rzeczywiste

- Naturalne: 1,2,3,…
- Całkowite: …,-2,-1,0,1,2,3,….
- Wymierne: można przedstawić jako m/n
- Niewymierna: nie można przedstawić jako m/n, np. $\sqrt{2}$
- Przestępne: e, π
  - π = [obwód koła]/[średnica] = 3,14159265
  - e = 1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!+…=2,718281828

Algebra liczb rzeczywistych

- Przemienność dodawania $a+b=b+a$
- Przemienność mnożenia $ab=ba$
- Łączność dodawania $a+(b+c)=(a+b)+c$
- Łączność mnożenia $a(bc)=(ab)c$
- Rozdzielność mnożenia względem dodawania $a(b+c)=ab+ac$
- Moduł liczby $|a|=+\sqrt{a^2}$
- Działanie na potęgach $a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m/a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = (a^n)^m=a^{n*m}$

$(ab)^m = a^m b^m$

$a^{-n} = 1/a^n$

$a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$

Liczby zespolone

Równanie $x^2=-1$ nie ma rozwiązania w dziedzinie liczb rzeczywistych

W dziedzinie liczb zespolonych takie rozwiązania istnieją: $x_1=-i$, $x_2=i$,
gdzie $i=\sqrt{-1}$, czyli $i^2=-1$

Ogólna postać liczby zespolonej $z = x+i*y$
x – część rzeczywista liczby zespolonej Re(z)
y – część urojona liczby zespolonej Im(z)

Przykłady liczb zespolonych: 2-2i, 4i, -6i, 0,5+0,1i

Liczby rzeczywiste to podzbiór liczb zespolonych, dla których y=0, Im(z)=0

Potęgi i:
$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^{-1}= 1/i = i/i^2 = i/(-1) =-i$

Działania na liczbach zespolonych

Dwie liczby zespolone: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$

Równość: $z_1=z_2$, jeśli $x_1=x_2$ oraz $y_1=y_2$

Dodawanie: $z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i\,(y_1+y_2)$

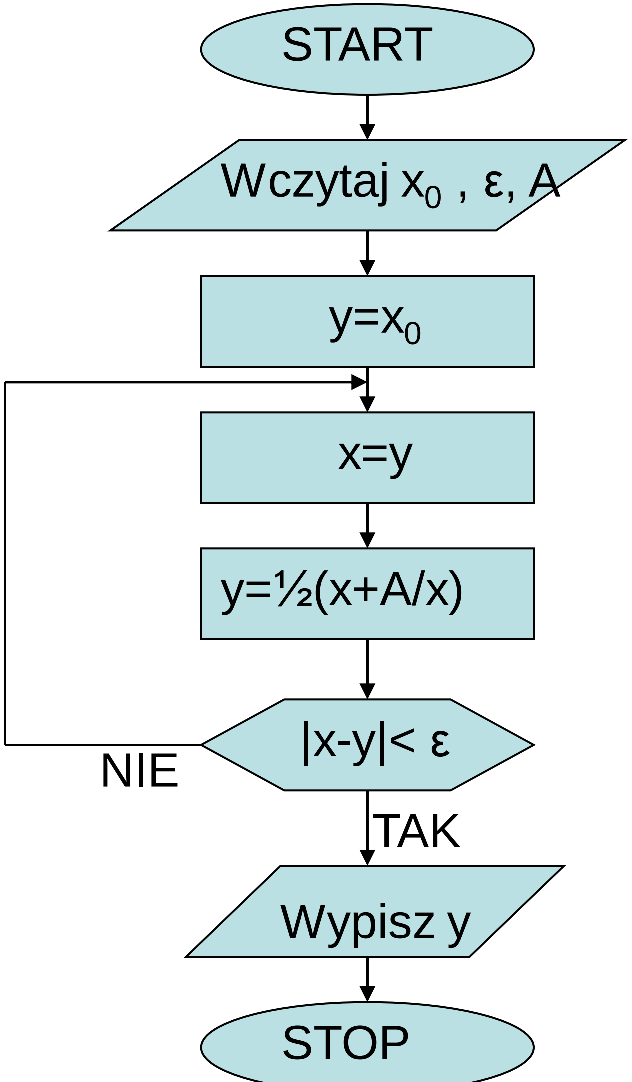
Mnożenie: $z_1z_2 = (x_1+iy_1)\,(x_2+iy_2) = x_1\,(x_2+iy_2) + iy_1\,(x_2+iy_2) =$
$=x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

Sprzężenie zespolone liczby $z=x+iy$, to liczba $z^*=x-iy$

Kwadrat modułu liczby zespolonej $z\,z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2-ixy+iyx-i^2y^2 = x^2+y^2$

Wzór Eulera $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$,
$e^{-iy} = \cos(y) - i\sin(y)$,
$\cos(y) = (e^{iy} + e^{-iy})/2$
$\sin(y) = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$

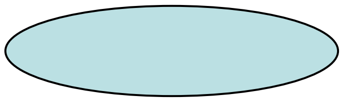
Algorytm rozwiązania równania x=f(x)



$x=\frac{1}{2}(x+A/x)$

Ślad działań

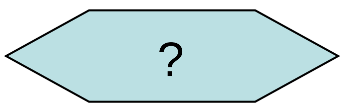
Elementy algorytmu sekwencyjnego



Komórka początku lub końca

Komórka wejścia/wyjścia

Komórka operacyjna



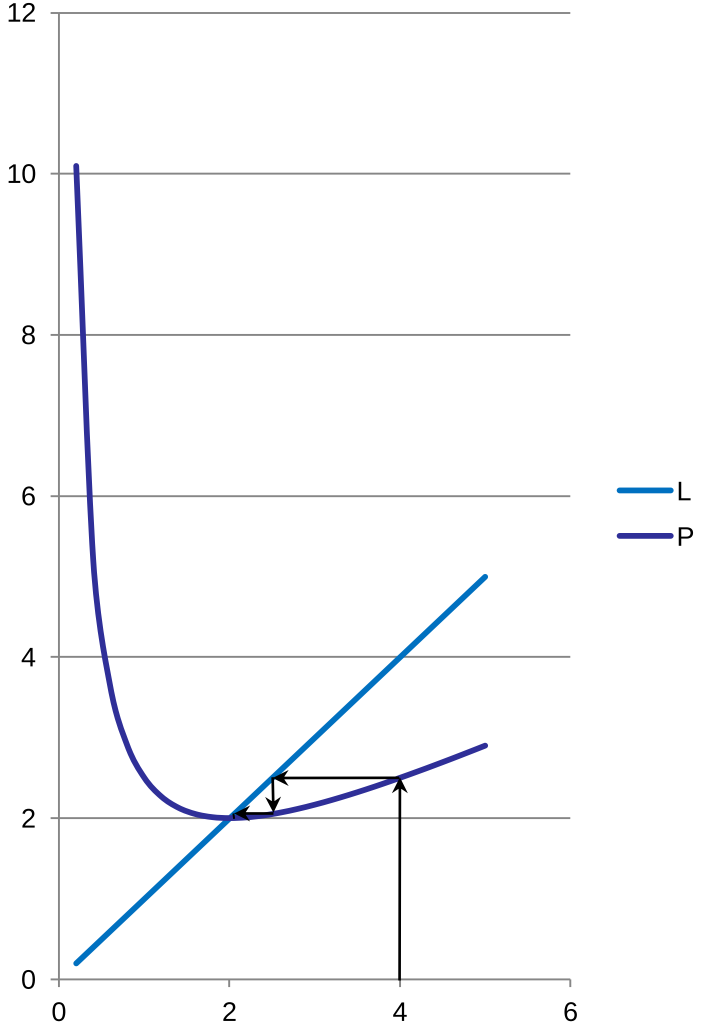
Komórka warunku –odpowiedź TAK lub NIE

Kierunek do kolejnej komórki

x=f(y)

Instrukcja podstawienia – wyliczona wartość wyrażenia f(y) podstawiana jest jako nowa wartość zmiennej x

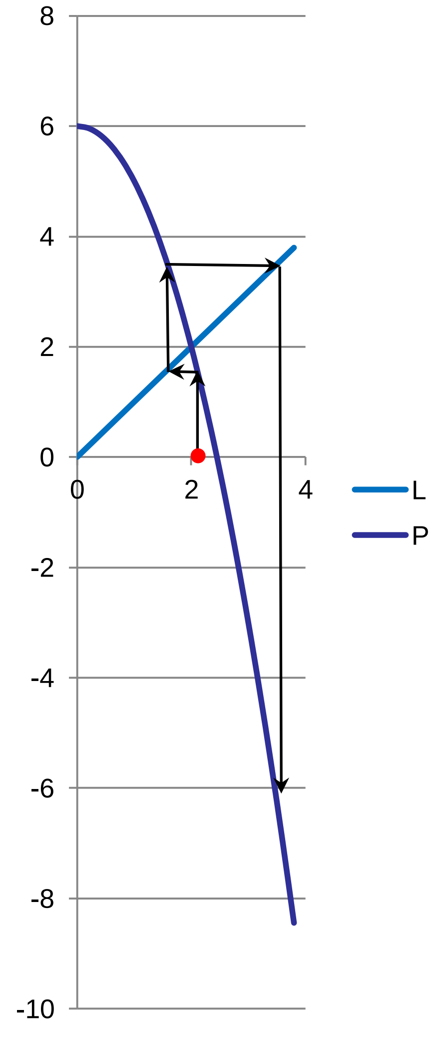
Proces zbieżny: $x=\frac{1}{2}(x+4/x)$



x	y
4	2.5
2.5	2.05
2.05	2.000609756
2.000609756	2.000000093
2.000000093	2

Proces rozbieżny: x=6-x*x

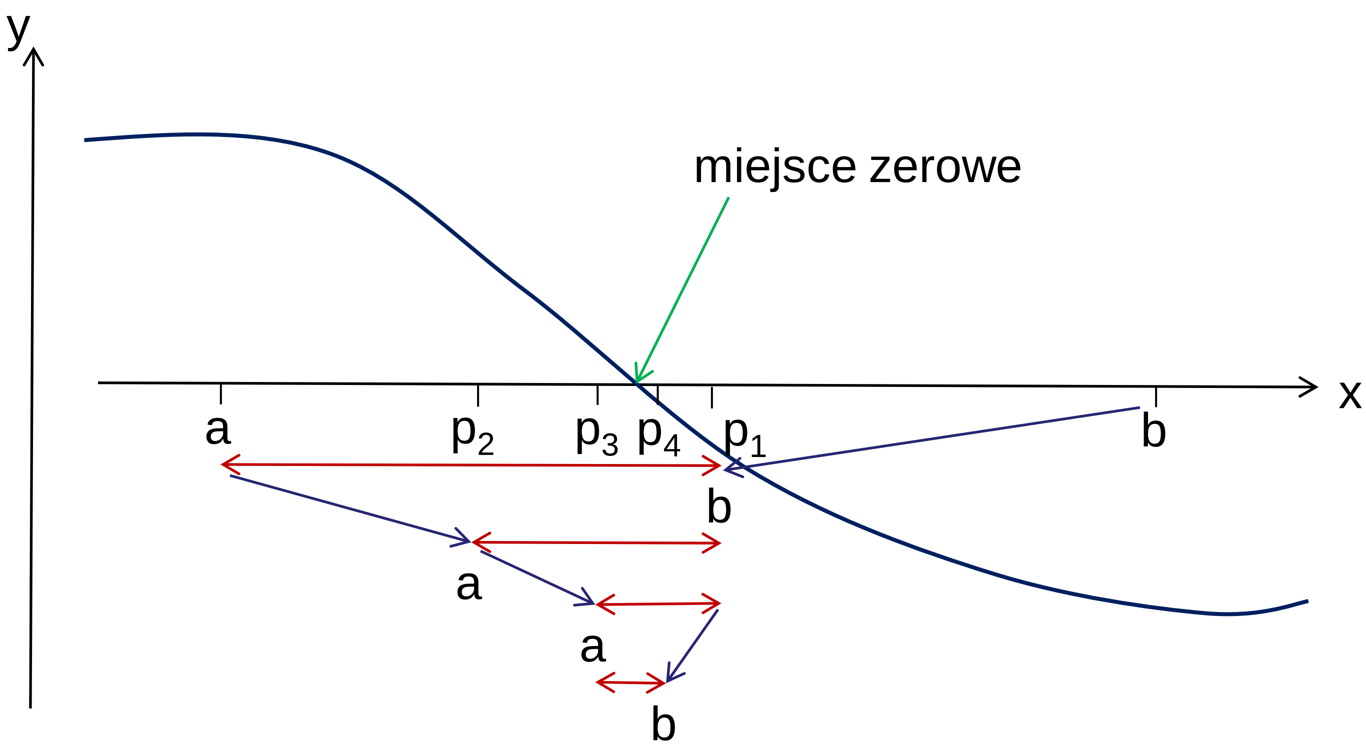
x	y
2.1	1.59
1.59	3.4719
3.4719	-6.05408961
-6.05408961	-30.65200101
-30.65200101	-933.5451657
-933.5451657	-871500.5763
-871500.5763	-7.59513E+11
-7.59513E+11	-5.7686E+23
-5.7686E+23	-3.32768E+47
-3.32768E+47	-1.10734E+95



Metoda bisekcji

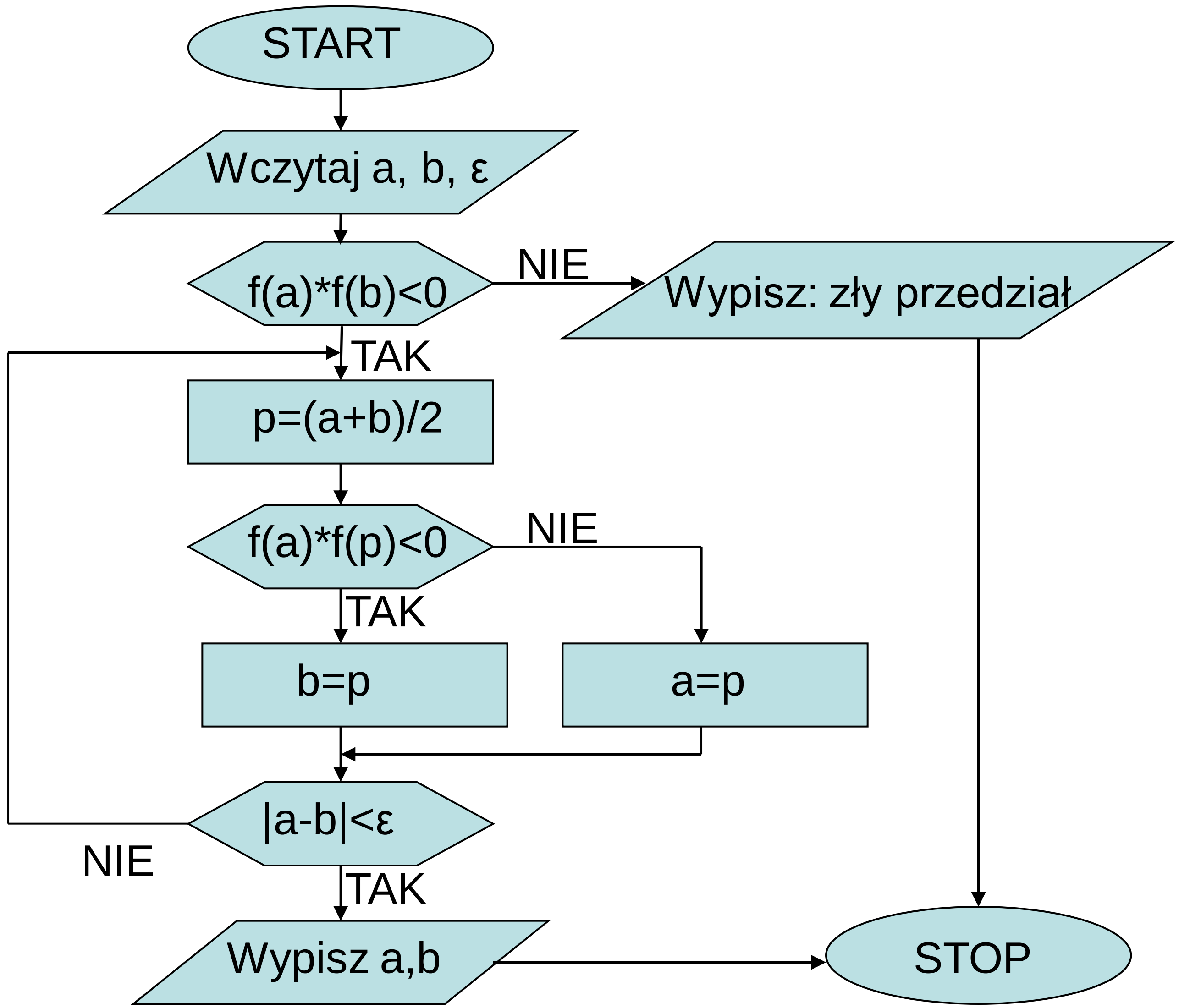
Rozwiązanie równania f(x)=0, czyli szukanie miejsc zerowych funkcji f(x).
Szukamy miejsca zerowego w przedziale <a,b>, w którym:

1) funkcja f(x) jest ciągła
2) f(x) zmienia znak w przedziale <a,b>, tzn. $f(a) \times f(b) < 0$



Przykład: $x^3+4*x^2-10=0$

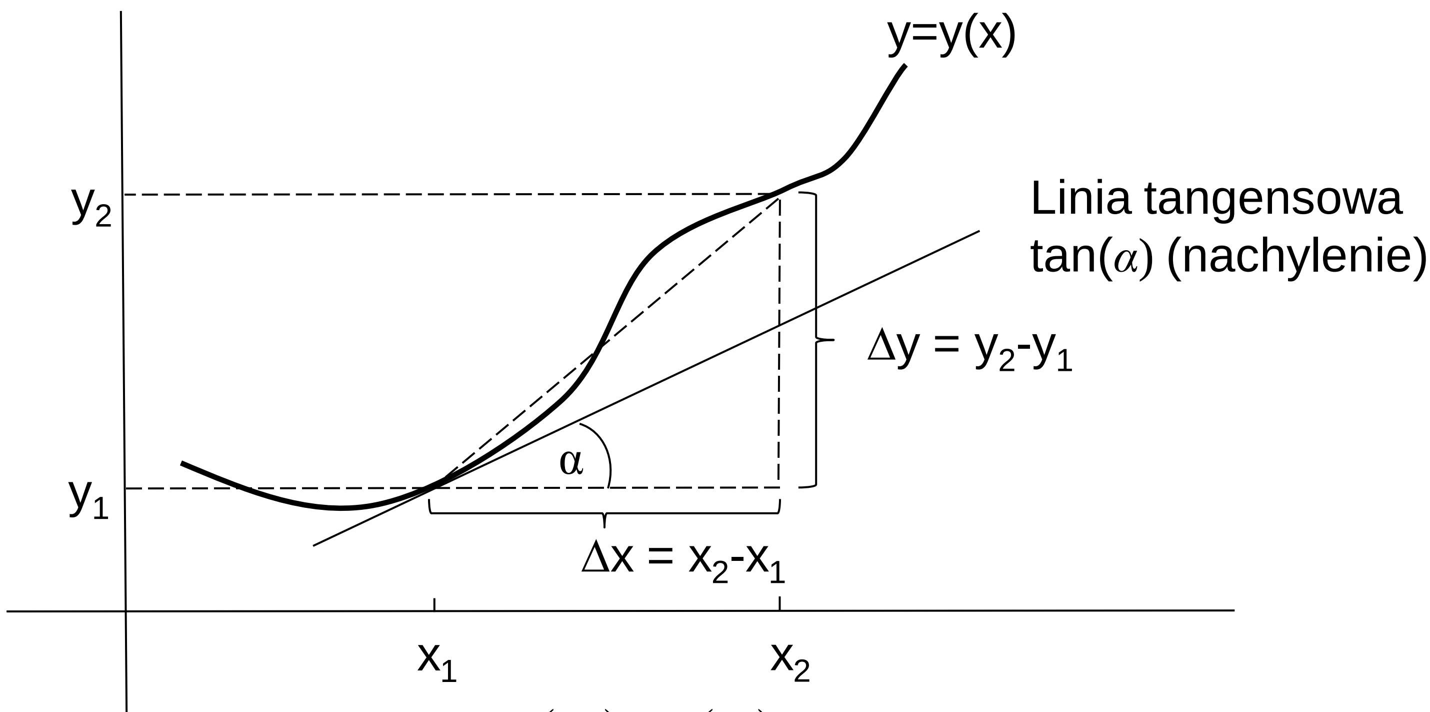
Algorytm metody bisekcji



Ślad działań

Rachunek różniczkowy

Pochodna funkcji– miara, jak szybko zmienna zależna zmienia się ze zmianą zmiennej niezależnej



$$\tan(\alpha) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

pochodna

Rachunek różniczkowy

Znajdź pochodną funkcji
$y = a\,x^2$
Niech $\Delta x = x_2 - x_1$ and oraz $\Delta y = y(x_2) - y(x_1)$

$$\Delta y = a(x_2)^2 - a(x_1)^2 = a(x_1+\Delta x)^2 - a(x_1)^2 = a[(x_1)^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2] - a(x_1)^2 =$$
$$= a[2x_1\Delta x + (\Delta x)^2]$$

Po podzieleniu przez Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2a\,x_1 + a\,\Delta x$$

W granicy, gdy $x_2 \to x_1$ (tzn. $\Delta x \to 0$)

$$\frac{d\left(ax^2\right)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2a\,x$$

Pochodną funkcji $y=ax^2$ jest $dy/dx=2ax$

Rachunek różniczkowy

Pochodne wybranych funkcji elementarnych (*a* jest stałą):

Funkcja *y=y(x)*	**Pochodna *dy/dx=y'(x)***
x^n	$n\, x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
a	0

Niech y(x) oraz z(x) są różniczkowalnymi funkcjami x:

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \qquad \frac{d(y-z)}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} \qquad \frac{d(yz)}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d(y/z)}{dx} = \frac{z\left(\frac{dy}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{z^2}$$

Funkcja złożona f(u(x))

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dx}$$

Pochodne - przykłady

$d/dx(4*x^5 – 0.3*x^3+10) = 4\ d/dx\ x^5 – 0.3\ d/dx\ x^3 + d/dx(10) =$
$4*(5*x^4)-0.3*(3*x^2) +0 = 20*x^4-0.9*x^2$

$d/dx(\sin(x)*\cos(x)) = d/dx(\sin(x))*\cos(x)+\sin(x)*d/dx(\cos(x))=$
$=\cos(x)*\cos(x) +\sin(x)*(-\sin(x))=\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$

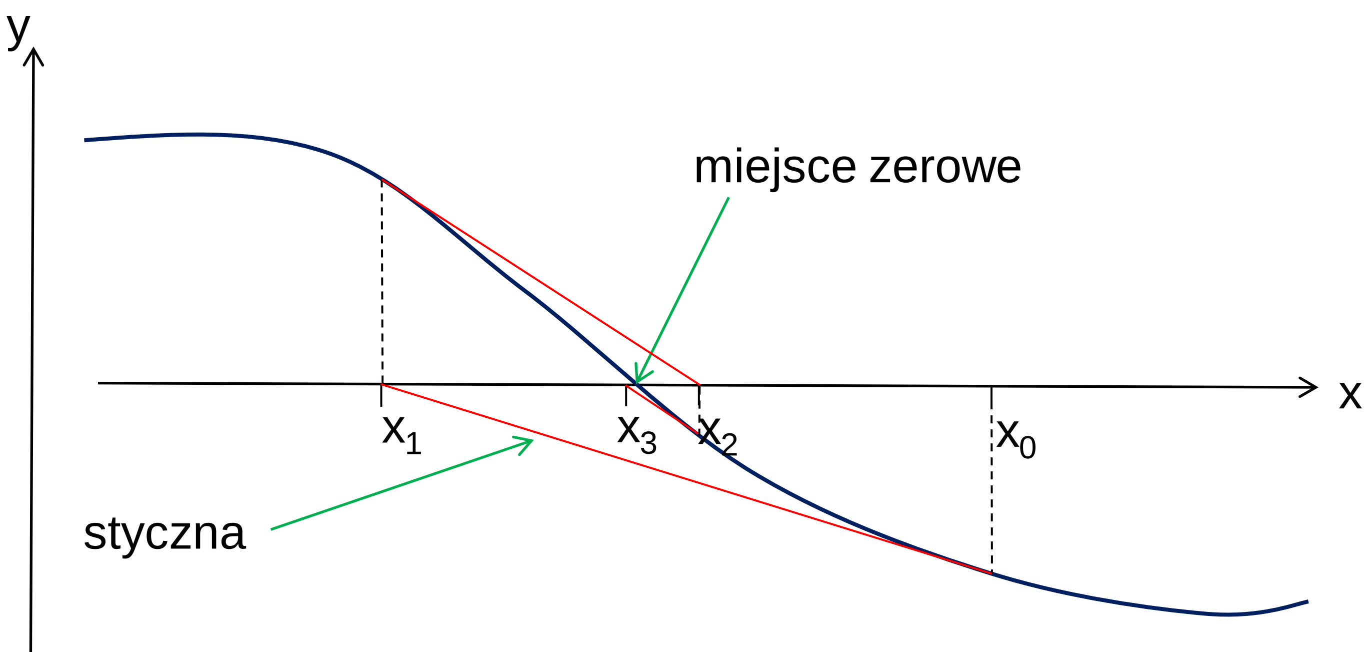
$d/dx(½ \sin(2x))= ½\ d/dx(\sin(2x)) = ½ \cos(2x)*2 =\cos(2x)$

$d/dx(4*x^5/(1 – x^3)) =[d/dx(4*x^5)*(1-x^3)-4*x^5*d/dx(1-x^3)]/(1-x^3)^2 =$
$=[20*x^4*(1-x^3)+12*x^7]/ (1-x^3)^2=[20*x^4-8x^7]/ (1-x^3)^2$

Metoda Newtona

Rozwiązanie równania f(x)=0, czyli szukanie miejsc zerowych funkcji f(x).
Szukamy miejsca zerowego rozpoczynając w dowolnym punkcie x_0, jeżeli:

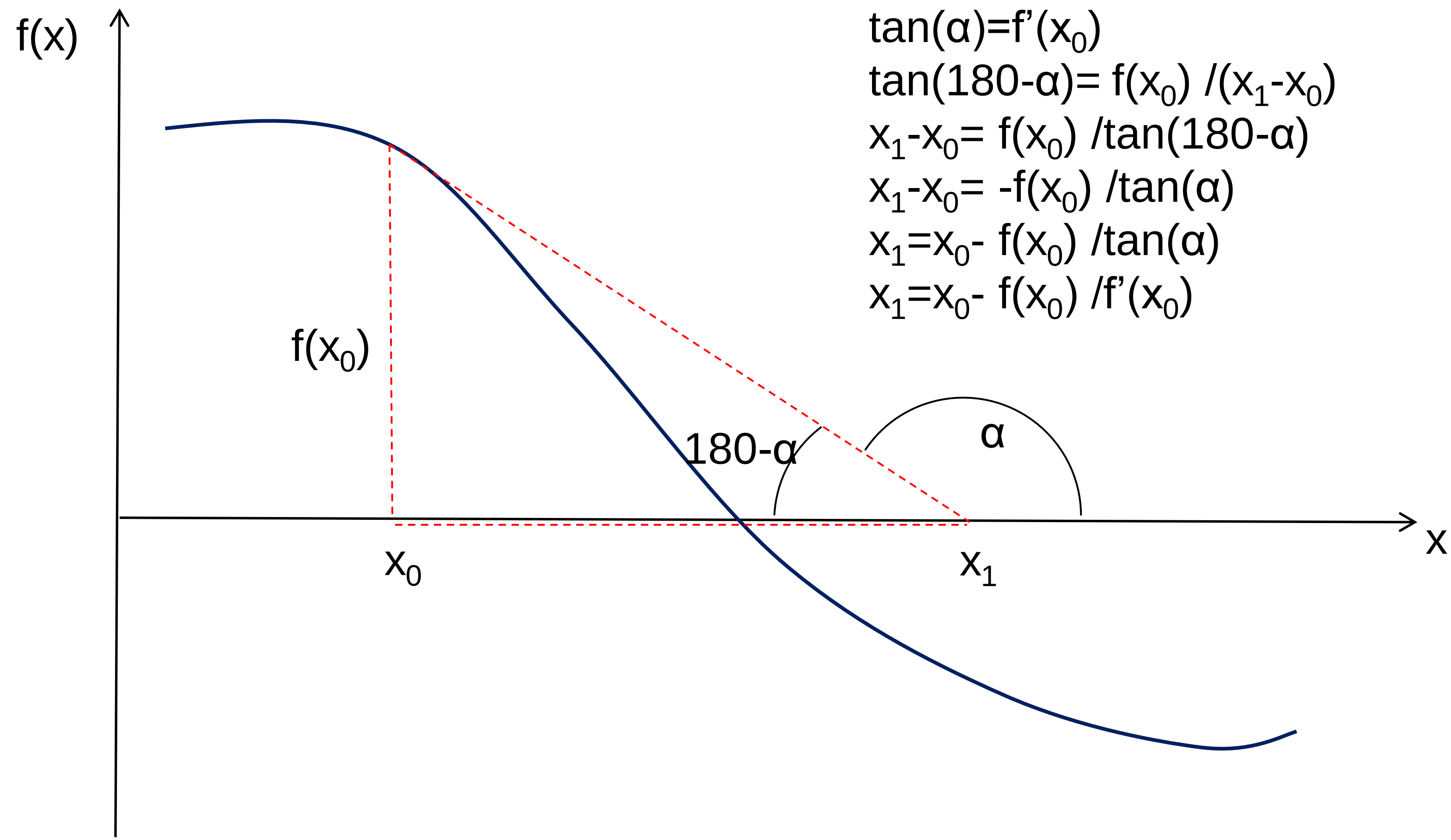
1) funkcja f(x) oraz jej pierwsza pochodna są ciągłe
2) pierwsza pochodna jest różna od zera



Rozwinięcie funkcji w szereg Taylora: $f(x_1) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x_1 - x_0) + \ldots$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

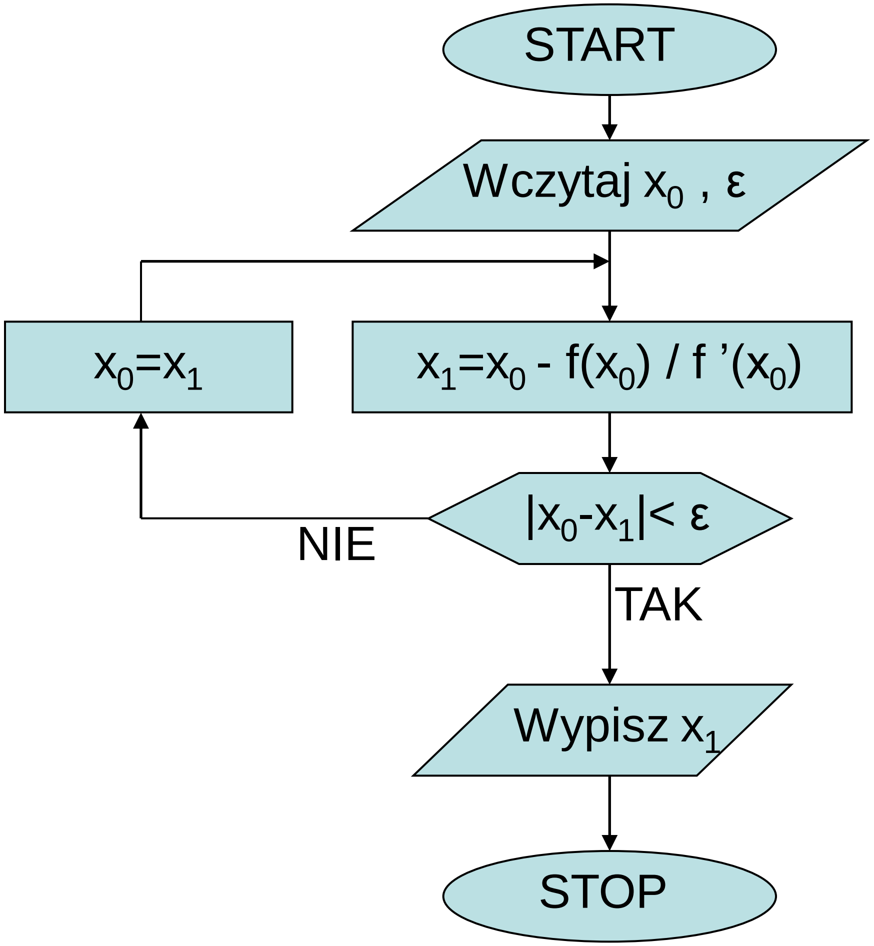
Wyjaśnienie metody Newtona



$$\tan(\alpha)=f'(x_0)$$
$$\tan(180-\alpha)= f(x_0) /(x_1-x_0)$$
$$x_1-x_0= f(x_0) /\tan(180-\alpha)$$
$$x_1-x_0= -f(x_0) /\tan(\alpha)$$
$$x_1=x_0- f(x_0) /\tan(\alpha)$$
$$x_1=x_0- f(x_0) /f'(x_0)$$

Wyprowadzenie z twierdzenia Pitagorasa

Algorytm metody Newtona

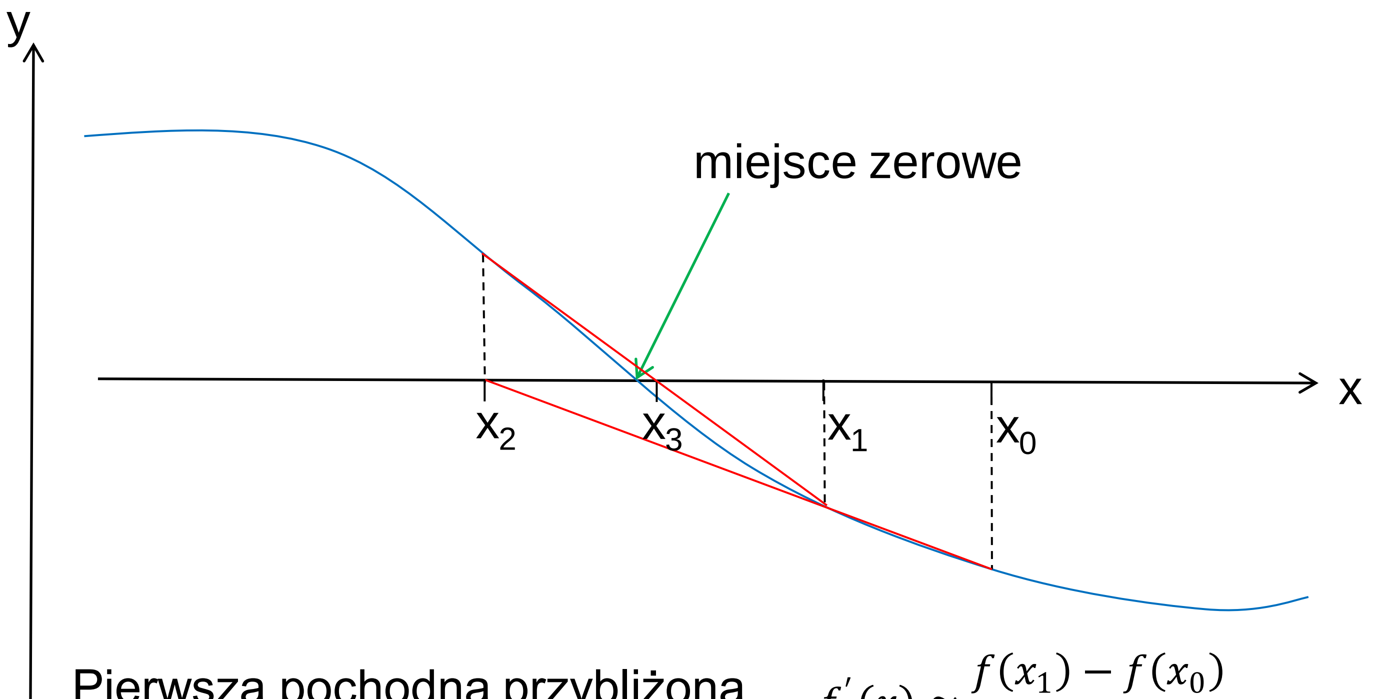


Ślad działań

Metoda siecznych

Rozwiązanie równania f(x)=0, czyli szukanie miejsc zerowych funkcji f(x).
Szukamy miejsca zerowego rozpoczynając z pary punktów (x_0, x_1) jeżeli:

1) funkcja f(x) jest ciągła
2) $f(x_0) \neq f(x_1)$, gdy $x_0 \neq x_1$

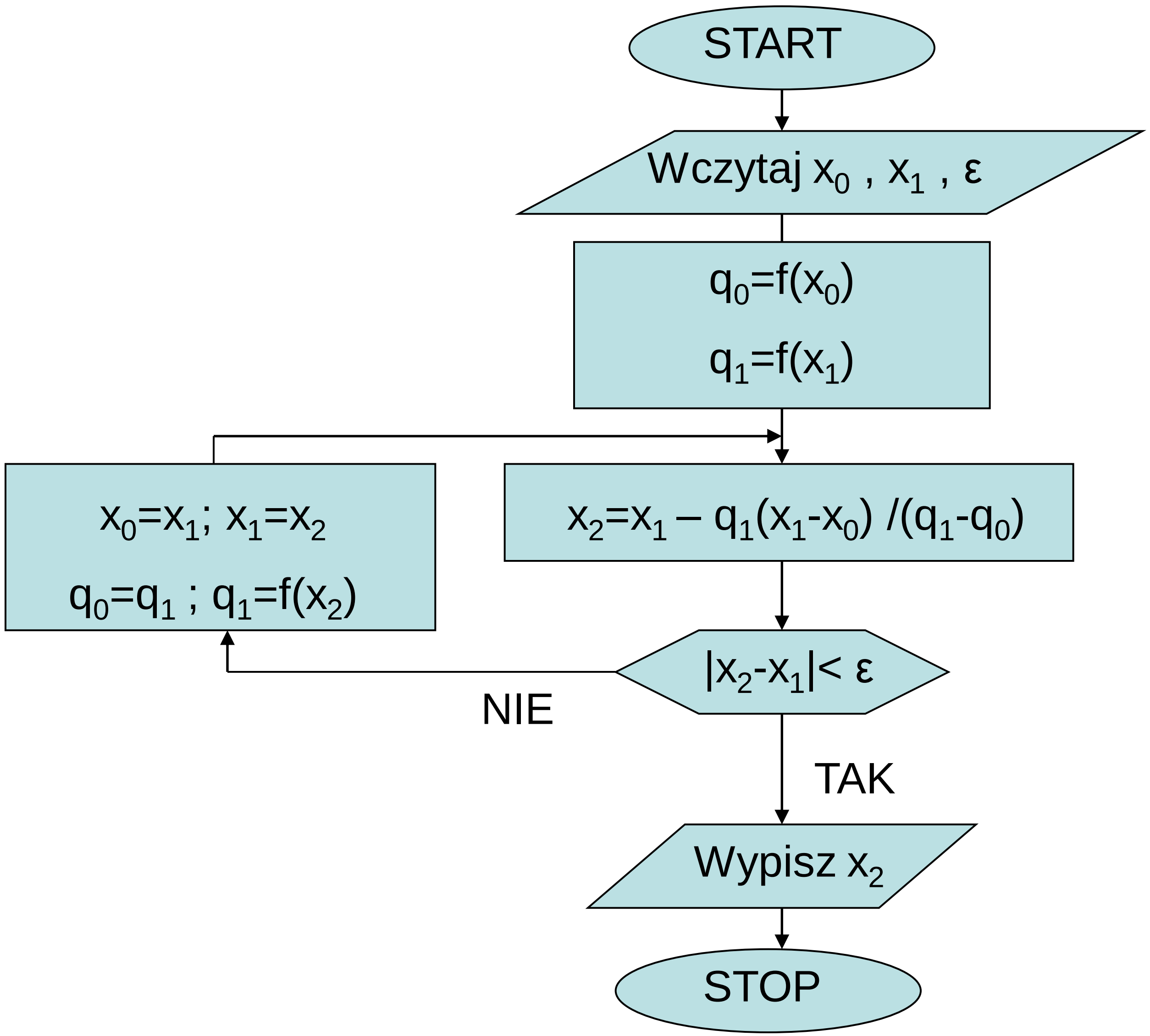


Pierwsza pochodna przybliżona przez iloraz różnicowy:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Algorytm metody siecznych



Ślad działań

Rachunek całkowy - podstawy

- Funkcją pierwotną *F(x)* funkcji *f(x)* jest taka funkcja *F(x)*, że *dF(x)/dx=f(x)*
- Całka nieoznaczona to po prostu funckja pierwotna
- Całka oznaczona to granica sumy członów $f(x)\Delta x$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Rachunek całkowy - przykłady

Samochód porusza się ze stałą prędkością v(t)=50 km/h. Oblicz odległość, jaką pokona w ciągu 2 h (godzin).

$$s = v(t)\Delta t = 50km/h * 2h = 100km$$

$$s = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 50dt = 50t\Big|_0^2 = 50*2 - 50*0 = 100km$$

Kamień spada z przyspieszeniem g(t) = 10 m/s^2. Na początku jego prędkość wynosiła 0 m/s. Oblicz odległość, jaką kamień pokona między 2^{gą} a 4^{tą} sekundą spadku.

$$v(t) = \int g(t)dt = \int 10dt = 10t + const$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad const = 0$$

$$s = \int_2^4 v(t)dt = \int_2^4 10tdt = 5t^2\Big|_2^4 = 5*4^2 - 5*2^2 = 80 - 20 = 60m$$

Rachunek całkowy - przykłady

Jak obliczyć całkę z iloczynu dwóch funkcji?
Całkowanie przez części:

$$\int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx$$

Całka nieoznaczona

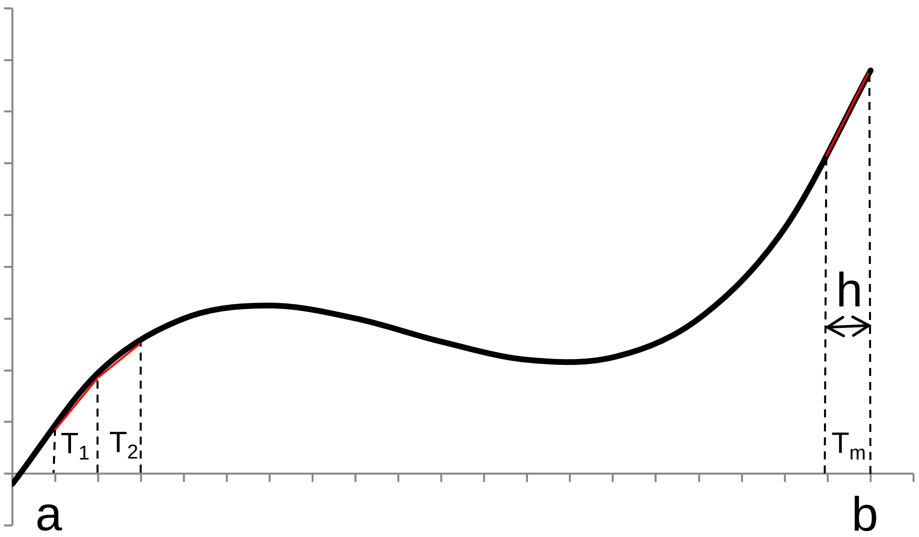
$$\int x\sin x\,dx = \int x\frac{d(-\cos x)}{dx}dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + const$$

Całka oznaczona

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\,|_0^\pi + \sin x\,|_0^\pi = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

Całkowanie numeryczne

Metoda trapezów



$$\int_a^b f(x)dx$$

$$h = \frac{b-a}{m}$$

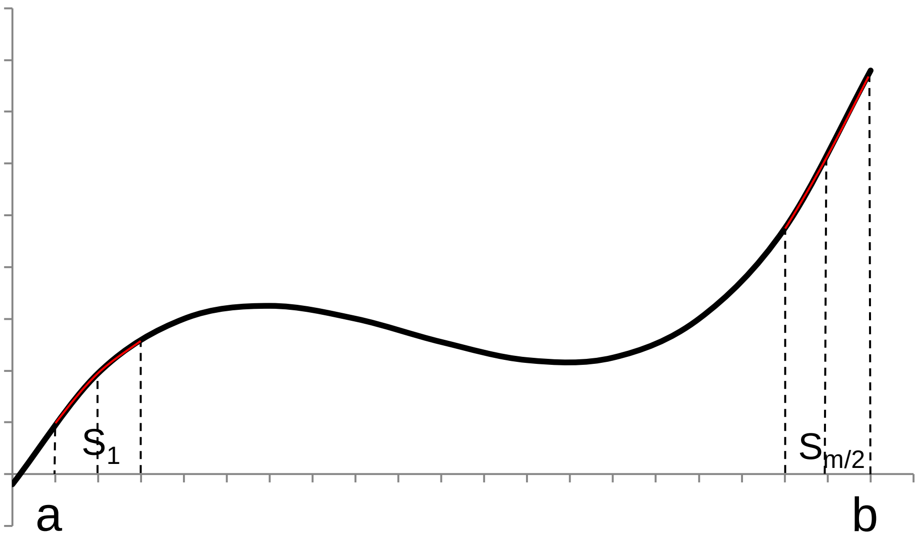
$$T_1 = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right] \qquad T_2 = \frac{h}{2}\left[f(a+h) + f(a+2h)\right] \qquad \ldots \qquad T_m = \frac{h}{2}\left[f(a+(m-1)*h) + f(a+m*h)\right]$$

$$T_1 = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] \qquad T_2 = \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2\right] \qquad \ldots \qquad T_m = \frac{h}{2}\left[f_{m-1} + f_m\right], \qquad f_i = f(a+i*h)$$

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_m = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + f_m\right]$$

Całkowanie numeryczne

Metoda Simpsona



$$\int_a^b f(x)dx$$

$$h = \frac{b-a}{m}$$

m parzyste

$$S_1 = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] \qquad S_2 = \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] \qquad \ldots \qquad S_{m/2} = \frac{h}{3}[f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m], \qquad f_i = f(a + i*h)$$

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{m/2} = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m]$$

Całkowanie analityczne - przykład

$$I = \int_{10}^{12} f(x)dx$$

f(x)=x³

$$\int_{10}^{12} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{10}^{12} = \frac{12^4}{4} - \frac{10^4}{4} = 2684$$

f(x)=x⁴

$$\int_{10}^{12} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{10}^{12} = \frac{12^5}{5} - \frac{10^5}{5} = 29766,4$$

Całkowanie numeryczne - przykład

$$I = \int_{10}^{12} f(x)dx$$

	f(x)	
x	x^3	x^4
10	1000	10000
11	1331	14641
12	1728	20736

Wyniki obliczeń numerycznych

	x^3	x^4
T(h=2)	2728	30736
T(h=1)	2695	30009
S(h=1)	2684	29766,67
I (dokładny)	2684	29766,4

f(x)=x^3

$$T(h=2) = \frac{2}{2}(1000+1728) = 2728$$

$$T(h=1) = \frac{1}{2}(1000+2*1331+1728) = 2695$$

$$S(h=1) = \frac{1}{3}(1000+4*1331+1728) = 2684$$

f(x)=x^4

$$T(h=2) = \frac{2}{2}(10000+20736) = 30736$$

$$T(h=1) = \frac{1}{2}(10000+2*14641+20736) = 30009$$

$$S(h=1) = \frac{1}{3}(10000+4*14641+20736) = 29766\tfrac{2}{3}$$

Błędy metody trapezów

błąd ~ h^2

h	T(h)	T(h)-I
2	2728	44
1	2695	11

h	T(h)	T(h)-I
2	30736	969,6
1	30009	242,6

Granica funkcji

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Problemy, gdy w granicy funkcja jest nieciągła.
Przykłady: 0/0, ∞/∞, ∞-∞

Reguła de l'Hôspitala (opublikowana w 1696 roku)
Gdy f(x)→0 i g(x)→0 dla x→a, to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

jeżeli g'(x)≠0. Gdy nadal f'(x)→0 i g'(x)→0 dla x→a, to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Szereg geometryczny

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} ax^r = ax^0 + ax^1 + ax^2 + \ldots + ax^{n-1} \qquad /* \, x$$

$$xS_n = ax^1 + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^n$$

$$S_n - xS_n = a - ax^n = a\left(1 - x^n\right)$$

$$S_n\left(1 - x\right) = a\left(1 - x^n\right)$$

$$S_n = a\frac{1 - x^n}{1 - x} \qquad x \neq 1$$

Symbol sumy:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i$$

Gdy a=1

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

i) Suma $\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right)$ jest równa $\left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$

ii) $\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right)$ Jest rozwinięciem w szereg funkcji $\left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$

Szereg Maclaurina

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

$c_0, c_1, c_2, c_3 \dots$ stałe

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = c_1 + 2c_2 x^1 + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3 x^1 + 12c_4 x^2 + \dots$$

Thus

$$f(0) = c_0 \qquad f'(0) = c_1 \qquad f''(0) = 2!c_2 \qquad f'''(0) = 3!c_3$$

$$f^{(n)}(0) = n!c_n \qquad\qquad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots}$$

Szereg Taylora

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots$$

$c_0, c_1, c_2, c_3 \dots$ stałe

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = c_1 + 2c_2(x-a)^1 + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3(x-a)^1 + 12c_4(x-a)^2 + \dots$$

Thus

$$f(a) = c_0 \qquad f'(a) = c_1 \qquad f''(a) = 2!c_2 \qquad f'''(a) = 3!c_3$$

$$f^{(n)}(a) = n!c_n \qquad\qquad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots}$$

Rozwinięcie w szereg sin(x)

$$f(x) = \sin x$$

$$f^{'}(x) = \cos x$$

$$f^{''}(x) = -\sin x$$

$$f^{'''}(x) = -\cos x$$

$$f^{''''}(x) = \sin x$$

$$\sin x = \frac{1}{0!} f(0)x^0 + \frac{1}{1!} f^{'}(0)x^1 + \frac{1}{2!} f^{''}(0)x^2 + \frac{1}{3!} f^{'''}(0)x^3 + \frac{1}{4!} f^{''''}(0)x^4 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n \ldots$$

$$\sin x = \frac{1}{0!} sin(0)x^0 + \frac{1}{1!} cos(0)x^1 - \frac{1}{2!} sin(0)x^2 - \frac{1}{3!} cos(0)x^3 + \frac{1}{4!} sin(0)x^4 + \cdots$$

$$\sin x = x^1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots$$

Szereg Maclaurina - przykład

$$f(x) = y_0 e^{-kx}$$

$$y_0 = 1000 \qquad\qquad k = 0,2$$

Oblicz wartość f(6) stosując rozwinięcie w szereg Maclaurina

$$f'(x) = -ky_0 e^{-kx}$$

$$f''(x) = k^2 y_0 e^{-kx}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n k^n y_0 e^{-kx}$$

$$f^{(n)}(x) = -k * f^{(n-1)}(x)$$

Wywołaj Taylor series

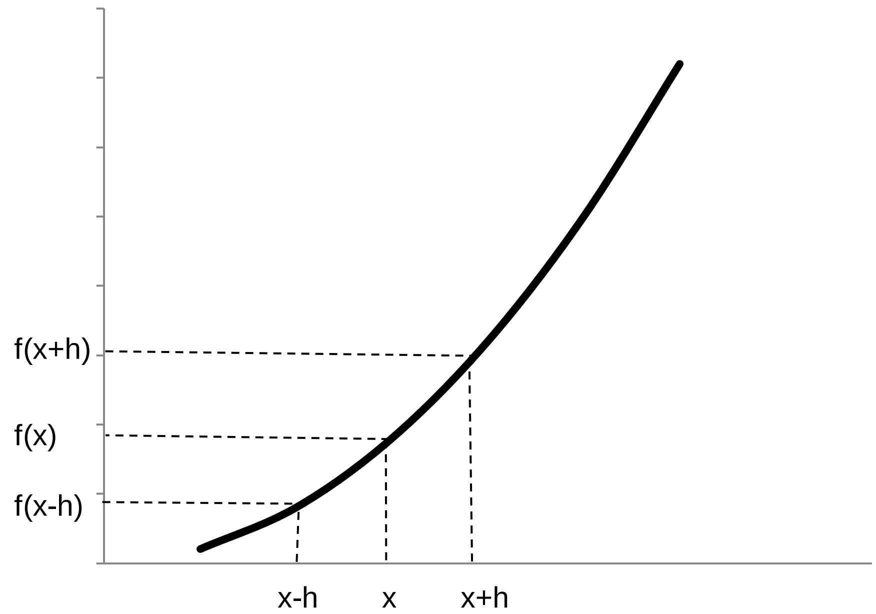
Różniczkowanie numeryczne

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Przybliżenia jednostronne:

$$\tilde{f}'_P(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\tilde{f}'_L(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$



Średnia P i L (różnica centralna):

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{f}'_P(x) + \tilde{f}'_L(x)}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Różniczkowanie – błąd metody

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\frac{1}{3!}f'''(x)h^3+\ldots \\ f(x-h) &= f(x)-\frac{1}{1!}f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2-\frac{1}{3!}f'''(x)h^3+\ldots \end{aligned}\right\} -$$

Pochodna jednostronna

$$f(x+h)\approx f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2$$

$$f'(x)h\approx f(x+h)-f(x)-\frac{1}{2!}f''(x)h^2 \quad /:h$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{1}{2!}f''(x)h$$

pochodna błąd ~ h^1

Pochodna centralna

$$f(x+h)-f(x-h)\approx 2f'(x)h+\frac{2}{3!}f'''(x)h^3$$

$$2f'(x)h\approx f(x+h)-f(x-h)-\frac{2}{3!}f'''(x)h^3 \quad /:(2h)$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{1}{3!}f'''(x)h^2$$

pochodna błąd ~ h^2

Przykład – obliczenie pochodnej

Oblicz pochodną ln(x) w punkcie x=3 metodą pochodnej centralnej oraz jednostronnej dla różnych długości kroków:

f(x)=ln(x)   ln'(3)=1/3   ln(3)=1.098612

f'(x)=[f(x+h)-f(x-h)]/(2*h)

h	x±h	f(x±h)	f'(3)	błąd	h^2	błąd/h^2
1	4	1.386294	0.346574	0.01324	1	0.01324
	2	0.693147				
0.5	3.5	1.252763	0.336472	0.003139	0.25	0.012556
	2.5	0.916291				
0.1	3.1	1.131402	0.333457	0.000124	0.01	0.012354
	2.9	1.064711				

f'(x)=[f(x+h)-f(x)]/h

h	x+h	f(x+h)	f'(3)	błąd	h	błąd/h
1	4	1.386294	0.287682	-0.04565	1	-0.04565
0.5	3.5	1.252763	0.308301	-0.02503	0.5	-0.05006
0.1	3.1	1.131402	0.327898	-0.00544	0.1	-0.05435

Zmniejszenie kroku zmniejsza błąd, przy czym szybciej błąd maleje w metodzie różnic centralnych

Ekstrapolacja Richardsona

Czy wykonując obliczenia ze skończona długością kroku h można oszacować wynik graniczny dla h $\to$ 0 ?

$$F(h) = a_0 + a_1 h^p + O(h^r) \qquad\qquad r > p$$

F(h) – wartość obliczona dla długości kroku *h*
a_0 = *F(0)* hipotetyczna wartość dla zerowej długości kroku
p – rząd błędu metody numerycznej

Obliczamy wynik numeryczny *F* dla dwóch różnych kroków *h* i (*qh*)

$$\begin{cases} F(h) = a_0 + a_1 h^p + O(h^r) \\ F(qh) = a_0 + a_1 (qh)^p + O(h^r) \end{cases} \qquad\qquad q > 1$$

$$\begin{cases} F(h) = a_0 + a_1 h^p \qquad /* q^p \\ F(qh) = a_0 + a_1 q^p h^p \end{cases}$$

Ekstrapolacja Richardsona c.d.

$$\begin{cases} q^p F(h) = q^p a_0 + a_1 q^p h^p \\ F(qh) = a_0 + a_1 q^p h^p \end{cases}$$

odejmujemy stronami

$$q^p F(h) - F(qh) = a_0 \left(q^p - 1\right)$$

$$a_0 = F(h) + \frac{F(h) - F(qh)}{q^p - 1} + O\left(h^t\right) \qquad t > r$$

a_0 też jest obarczone błędem i postępowanie można prowadzić dalej.

Najczęściej ekstrapolację stosujemy dla q=2, a wtedy:

$$a_0 = F(h) + \frac{F(h) - F(2h)}{2^p - 1} + O\left(h^t\right) \qquad t > r$$

Ekstrapolacja Richardsona przykład 1

$$I = \int_{10}^{12} x^3 dx = 2684$$

Wyniki numeryczne metodą trapezów:

h	T(h)
2	2728
1	2695

$$a_0 = T(1) + \frac{T(1) - T(2)}{2^2 - 1} = 2695 + \frac{2695 - 2728}{3} = 2695 - 11 = 2684$$

Ekstrapolacja Richardsona przykład 2

f(x)=ln(x)   f'(x)=[f(x+h)-f(x-h)]/(2*h)

ln'(3)=1/3

h			P(h)	Δ/3	a_0
0.8	3.8	1.335001	0.341590		
	2.2	0.788457			
0.4	3.4	1.223775	0.335330	-0.002087	0.333243
	2.6	0.955511			
0.2	3.2	1.163151	0.333828	-0.000501	0.333328
	2.8	1.029619			
0.1	3.1	1.131402	0.333457	-0.000124	0.333333
	2.9	1.064711			

błąd metody różnic centralnych $\sim h^2$, czyli p=2.

Δ = P(h)-P(2h)

Równanie różniczkowe I rzędu

Równanie różniczkowe opisujące rozpad promieniotwórczy $\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)$

Propozycja rozwiązania: $N(t) = ae^{bt}$

Sprawdzanie poprawności: $\frac{dN(t)}{dt} = abe^{bt}$

Podstawienie do równania: $abe^{bt} = -kae^{bt}$

Lewa strona równa prawej, gdy: $b = -k$

$$N(t) = ae^{-kt}$$

Wartość a wyznaczana z warunku początkowego: $N(0) = N_0$

$$ae^{-k0} = N_0$$

$$a = N_0$$

Ostateczne rozwiązanie analityczne: $N(t) = N_0 e^{-kt}$

k – stała szybkości rozpadu promieniotwórczego

Rozpad promieniotwórczy

Równanie różniczkowe opisujące rozpad promieniotwórczy

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)$$

Rozwiązanie analityczne:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Okres połowicznego rozpadu τ:

$$N(\tau) = \tfrac{1}{2} N_0$$

$$N_0 e^{-k\tau} = \tfrac{1}{2} N_0$$

$$e^{-k\tau} = \tfrac{1}{2}$$

$$-k\tau = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$-k\tau = -\ln(2)$$

$$\boxed{\tau = \frac{\ln(2)}{k}}$$

Równanie różniczkowe – metoda Eulera

Równanie (*f* jest znaną funkcją):
$$\frac{dy(x)}{dx} = f\left(x, y(x)\right)$$

Wzór przybliżony na pochodną:
$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Po przekształceniu:
$$y(x+h) = y(x) + h\,\frac{dy(x)}{dx}$$

Uproszczony zapis:
$$y_i = y(x+ih) \qquad f_i = f\left(x+ih, y_i\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)_i$$

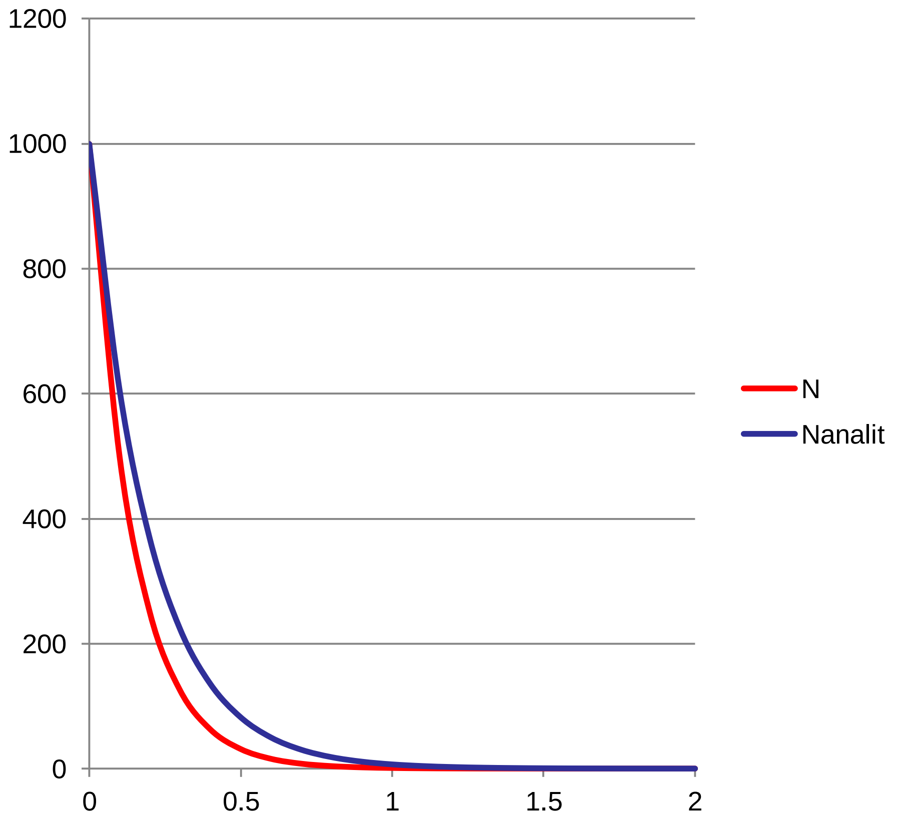
$$y_{i+1} = y_i + hf_i$$

Ostatni wzór pozwala na obliczanie wartości funkcji y punkt po punkcie.
Wartość funkcji w punkcie zerowym y_0 określają warunki początkowe.

Równanie różniczkowe I rzędu

$$\frac{dN}{dt} = -kN \qquad k = 5 \qquad \tau = 0.1386 \qquad h = 0.1$$

i	t	N	dN/dt	Nanalit
0	0	1000	-5000	1000
1	0.1	500	-2500	606.5307
2	0.2	250	-1250	367.8794
3	0.3	125	-625	223.1302
4	0.4	62.5	-312.5	135.3353
5	0.5	31.25	-156.25	82.085
6	0.6	15.625	-78.125	49.78707
7	0.7	7.8125	-39.0625	30.19738
8	0.8	3.90625	-19.5313	18.31564
9	0.9	1.953125	-9.76563	11.109
10	1	0.976563	-4.88281	6.737947
11	1.1	0.488281	-2.44141	4.086771
12	1.2	0.244141	-1.2207	2.478752
13	1.3	0.12207	-0.61035	1.503439
14	1.4	0.061035	-0.30518	0.911882
15	1.5	0.030518	-0.15259	0.553084
16	1.6	0.015259	-0.07629	0.335463
17	1.7	0.007629	-0.03815	0.203468
18	1.8	0.003815	-0.01907	0.12341
19	1.9	0.001907	-0.00954	0.074852
20	2	0.000954	-0.00477	0.0454



Równanie różniczkowe II rzędu

Drgania harmoniczne

F_p = ma   a - przyspieszenie

F_w = -kx   x - wychylenie

Druga zasada dynamiki Newtona, przyspieszenie, którego doznaje ciało o masie m, wiąże się z siłą: $F=md^2x/dt^2$

Przyjmijmy: m=1 k=1

Równowaga sił $F_p = F_w$, a=-x

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)$$

$$x(t) = ce^{bt}$$

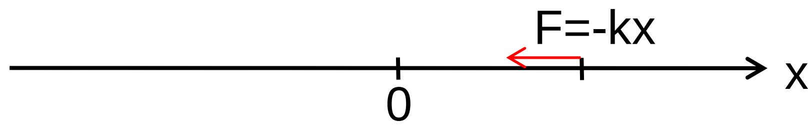
$$x'(t) = cbe^{bt}$$

$$x''(t) = cb^2e^{bt}$$

$$cb^2e^{bt} = -ce^{bt}$$

$$b^2 = -1$$

$$b = \pm i$$



Oscylator harmoniczny jednowymiarowy opisuje ciało, które porusza się po linii prostej pod wpływem siły F=-kx. Wielkość k to stała siłowa oscylatora, a znak minus zapewnia, że ma przeciwny zwrot do wychylenia.

Rozwiązania szczególne równania:

$$x_1(t) = ce^{it}$$

$$x_2(t) = ce^{-it}$$

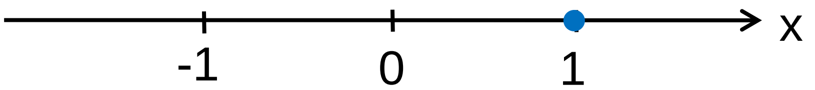
Rozwiązanie ogólne równania:

$$x(t) = c_1e^{it} + c_2e^{-it}$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczane z warunków początkowych

Równanie różniczkowe II rzędu

$$x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$



Warunki początkowe:

$$x(0) = 1$$
$$x'(0) = 0$$

$$x(0) = c_1 e^{i0} + c_2 e^{-i0} = c_1 + c_2 = 1$$
$$x'(0) = c_1 i e^{i0} - c_2 i e^{-i0} = ic_1 - ic_2 = 0$$
$$c_1 = c_2$$
$$2c_1 = 1$$
$$c_1 = \tfrac{1}{2} \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}$$

Rozwiązanie ogólne z uwzględnieniem warunków początkowych:

$$x(t) = \tfrac{1}{2} e^{it} + \tfrac{1}{2} e^{-it} = \boxed{\cos(t)}$$

Rozwiązanie numeryczne I

$$a(t) = -x(t) \qquad gdzie: \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Korzystamy z przybliżonych wzorów na pochodne:

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

Oznaczamy:

$$x_k = x(t_0 + k\Delta t)$$

$$v_k = v(t_0 + k\Delta t)$$

$$\Rightarrow$$

$$x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t$$

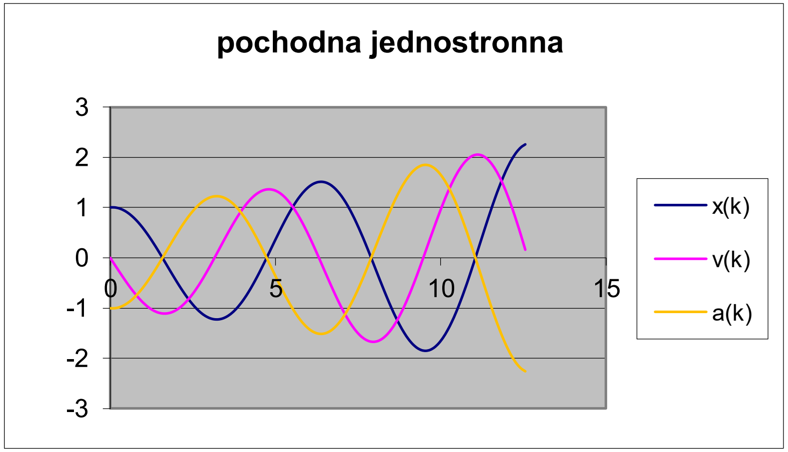
$$v_{k+1} = v_k + a_k \Delta t$$

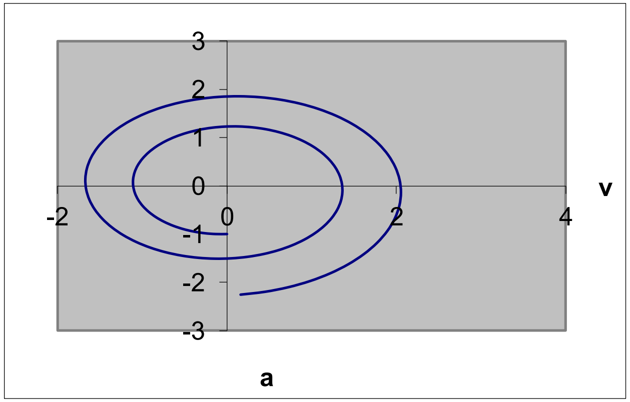
Z postaci równania wynika: $a_k = -x_k$

Rozwiązanie numeryczne I c.d.

Gdy t=0 : $x_0 = 1[m]$ $v_0 = 0\left[{}^{m}\!/_{s}\right]$ $\Delta t = \frac{\pi}{24}$

k	t(k)	x(k)	v(k)	a(k)
0	0	1	0	-1
1	0.1308997	1	-0.1309	-1
2	0.2617994	0.9828653	-0.261799	-0.982865
3	0.3926991	0.9485958	-0.390456	-0.948596
4	0.5235988	0.8974852	-0.514627	-0.897485
5	0.6544985	0.8301207	-0.632108	-0.830121
6	0.7853982	0.747378	-0.74077	-0.747378
7	0.9162979	0.6504114	-0.838602	-0.650411
8	1.0471976	0.5406387	-0.92374	-0.540639
9	1.1780972	0.4197214	-0.99451	-0.419721
10	1.3089969	0.2895404	-1.049451	-0.28954
11	1.4398966	0.1521675	-1.087352	-0.152168
12	1.5707963	0.0098335	-1.107271	-0.009833
13	1.701696	-0.135108	-1.108558	0.1351079
14	1.8325957	-0.280218	-1.090872	0.2802178
15	1.9634954	-0.423013	-1.054192	0.4230126
16	2.0943951	-0.561006	-0.99882	0.561006
17	2.2252948	-0.691751	-0.925384	0.6917512
18	2.3561945	-0.812884	-0.834834	0.8128837
19	2.4870942	-0.922163	-0.728428	0.9221632
20	2.6179939	-1.017514	-0.607717	1.0175142
21	2.7488936	-1.097064	-0.474525	1.0970641
22	2.8797933	-1.159179	-0.330919	1.1591793
23	3.010693	-1.202497	-0.179183	1.2024965
24	3.1415927	-1.225952	-0.021777	1.2259515





Rozwiązanie numeryczne II

$$a(t) = -x(t) \qquad gdzie: \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Korzystamy z przybliżonych wzorów na pochodne centralne:

$$v\left(t + \tfrac{1}{2}\Delta t\right) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$a(t+\Delta t) = \frac{v\left(t+\tfrac{3}{2}\Delta t\right) - v\left(t+\tfrac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v\left(t+\tfrac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t$$

$$v\left(t+\tfrac{3}{2}\Delta t\right) = v\left(t+\tfrac{1}{2}\Delta t\right) + a(t+\Delta t)\Delta t$$

Oznaczamy:

$$x_k = x(t_0 + k\Delta t)$$

$$v_k = v(t_0 + k\Delta t)$$

$$\Rightarrow$$

$$x_{k+1} = x_k + v_{k+\frac{1}{2}}\Delta t$$

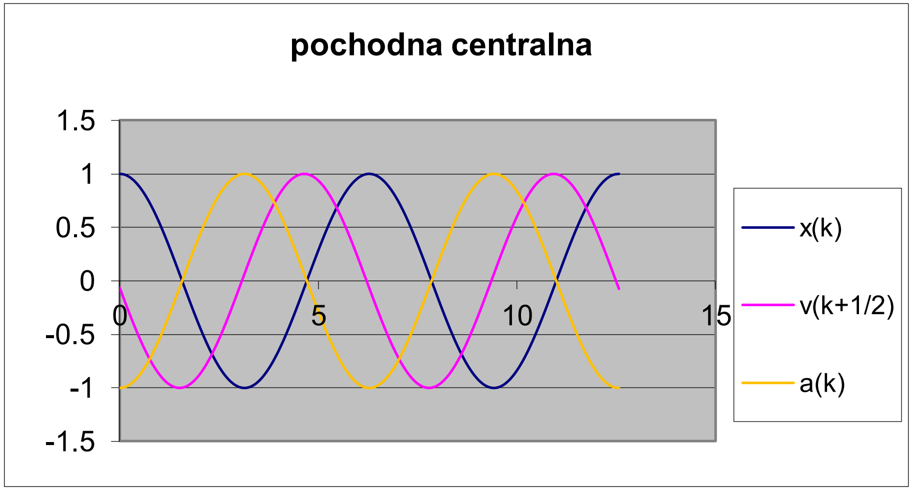
$$v_{k+\frac{3}{2}} = v_{k+\frac{1}{2}} + a_{k+1}\Delta t$$

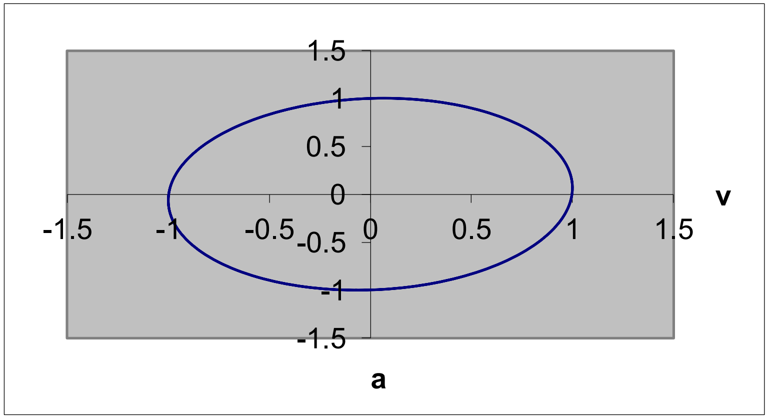
Z postaci równania wynika: $a_{k+1} = -x_{k+1}$

Rozwiązanie numeryczne II c.d.

Gdy t=0 : $x_0 = 1[m]$ $v_0 = 0\left[{m}/{s}\right]$ $v_{\frac{1}{2}} = v_0 + a_0 {\Delta t}/{2}$ $\Delta t = \frac{\pi}{24}$

k	t(k)	x(k)	v(k+1/2)	a(k)
0	0	1	-0.06545	-1
1	0.1308997	0.9914326	-0.195228	-0.991433
2	0.2617994	0.9658773	-0.321661	-0.965877
3	0.3926991	0.923772	-0.442583	-0.923772
4	0.5235988	0.8658381	-0.555921	-0.865838
5	0.6544985	0.7930682	-0.659733	-0.793068
6	0.7853982	0.7067094	-0.752241	-0.706709
7	0.9162979	0.6082413	-0.83186	-0.608241
8	1.0471976	0.4993511	-0.897224	-0.499351
9	1.1780972	0.3819047	-0.947216	-0.381905
10	1.3089969	0.2579145	-0.980977	-0.257914
11	1.4398966	0.1295049	-0.997929	-0.129505
12	1.5707963	-0.001124	-0.997782	0.0011236
13	1.701696	-0.131733	-0.980538	0.131733
14	1.8325957	-0.260085	-0.946493	0.2600851
15	1.9634954	-0.383981	-0.89623	0.3839807
16	2.0943951	-0.501297	-0.83061	0.5012969
17	2.2252948	-0.610024	-0.750758	0.6100235
18	2.3561945	-0.708298	-0.658042	0.7082976
19	2.4870942	-0.794435	-0.554051	0.7944351
20	2.6179939	-0.86696	-0.440566	0.8669602
21	2.7488936	-0.92463	-0.319532	0.9246302
22	2.8797933	-0.966457	-0.193024	0.9664569
23	3.010693	-0.991724	-0.063207	0.9917237
24	3.1415927	-0.999997	0.0676921	0.9999975





Równania kinetyki chemicznej

Reakcja 1 rzędu: $A \xrightarrow{k} B$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

$$[A] = [A]_0 e^{-kt}$$

Reakcja 2 rzędu: $H + H \xrightarrow{k} H_2$

$$v = \frac{d[H_2]}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d[H]}{dt} = k[H]^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = kx^2 \qquad \frac{dx}{dt} = -2kx^2$$

Rozwiązanie

$$\frac{dx}{dt} = -2kx^2$$

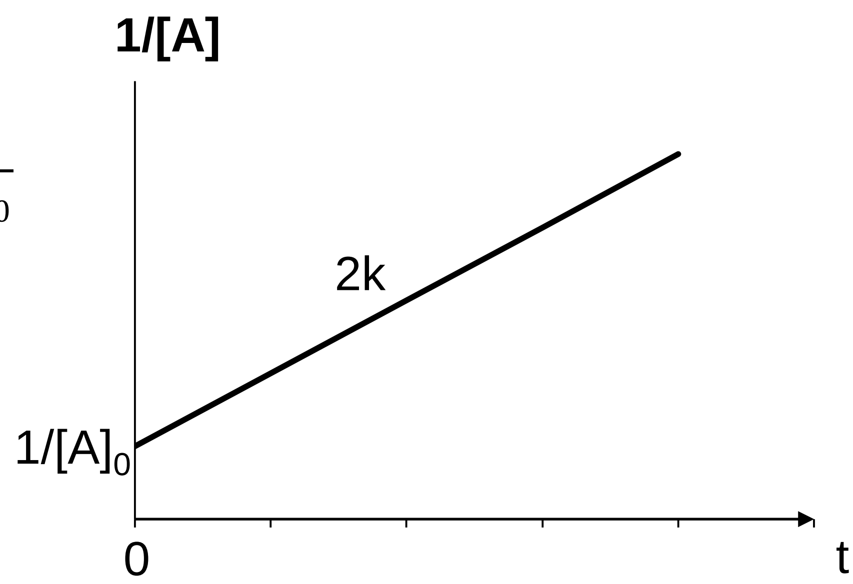
Rozdzielenie zmiennych $$-\frac{dx}{x^2} = 2k\,dt$$

Po scałkowaniu $$\frac{1}{x} = 2kt + c$$

Jeżeli w chwili t=0 stężenie początkowe wynosiło x_0, to $c=1/x_0$

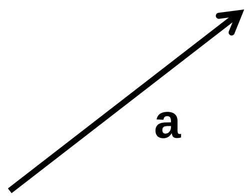
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = 2kt$$

$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = 2kt \qquad [A] = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}$$



Wykres 1/[A] jako funkcji t jest linią prostą o nachyleniu równym stałej szybkości 2k przecinającą oś rzędnych w punkcie $1/[A]_0$.

Wektory



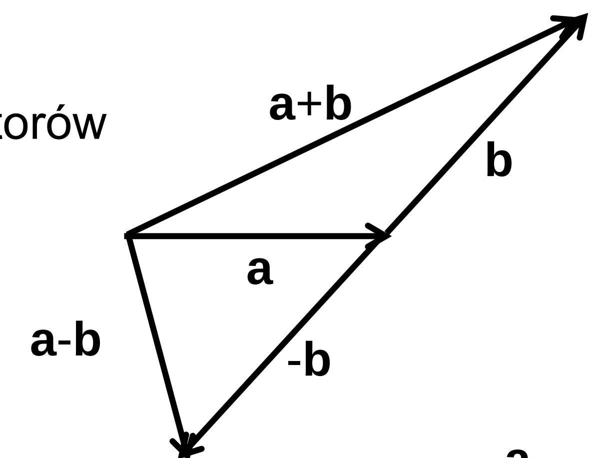
Wartość, kierunek i zwrot

<u>Przykłady:</u>
Droga
Prędkość
Przyspieszenie
Siła
Pęd
Moment pędu

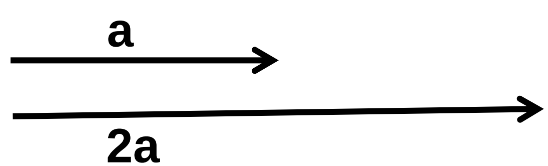
Równość wektorów **a** = **b**

Dodawanie wektorów
a+**b** = **b**+**a**

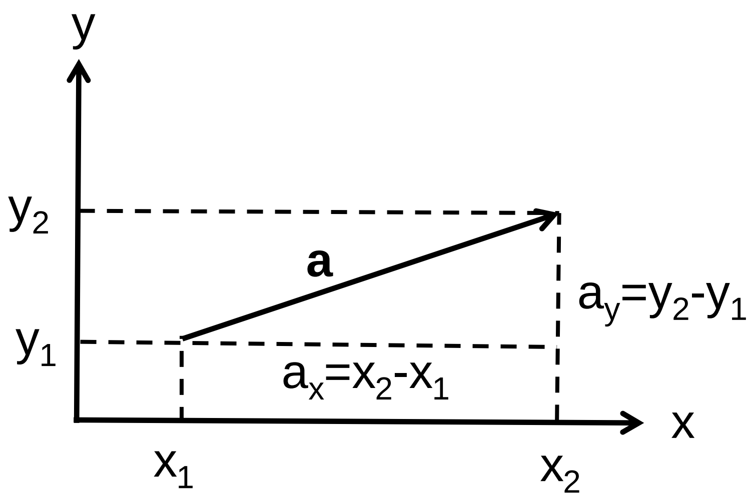
Odejmowanie wektorów
a-**b** = **a**+**(-b)**

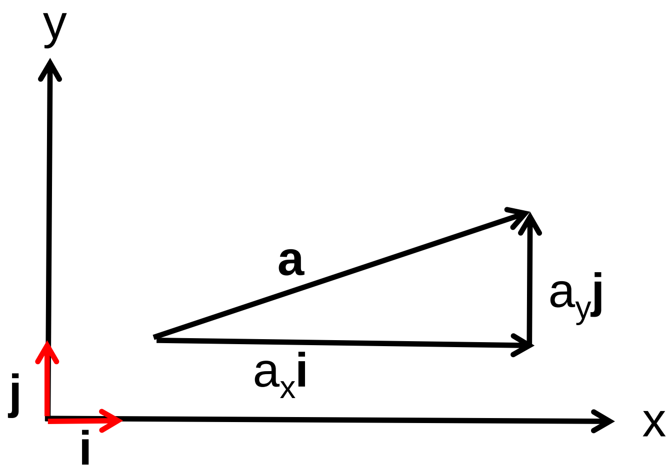


Mnożenie wektora przez skalar



Składowe wektorów





Wersory **i**, **j** są wektorami o długości jednostkowej skierowane wzdłuż osi x, y.

Składowe wektora **a**: $a_x=x_2-x_1$, $a_y=y_2-y_1$

Długość wektora $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

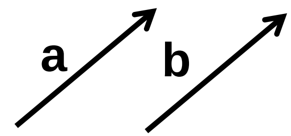
Zapis wektora: $\mathbf{a}=(a_x,a_y)$ lub $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}$

Wektor w 3 wymiarach: $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$ lub $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$

Działania na wektorach

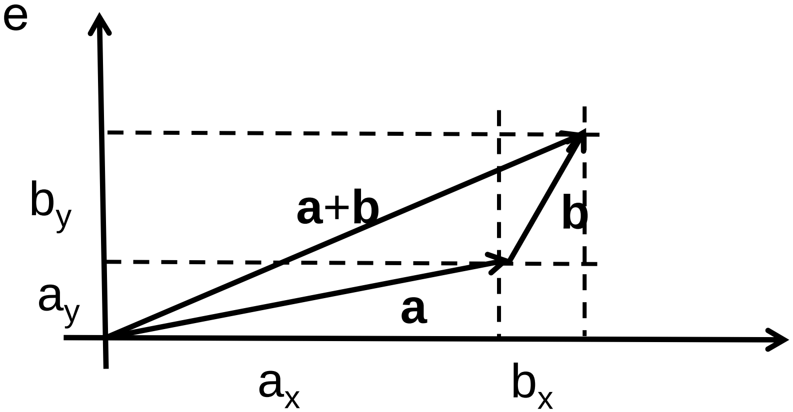
Rozważmy wektory $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$

Równość wektorów $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, gdy $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$

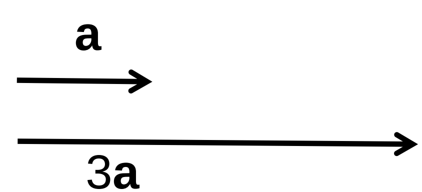


Dodawanie wektorów $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$

Przykład na płaszczyźnie



Mnożenie przez skalar: $c\mathbf{a}=(ca_x,\ ca_y,\ ca_y)$



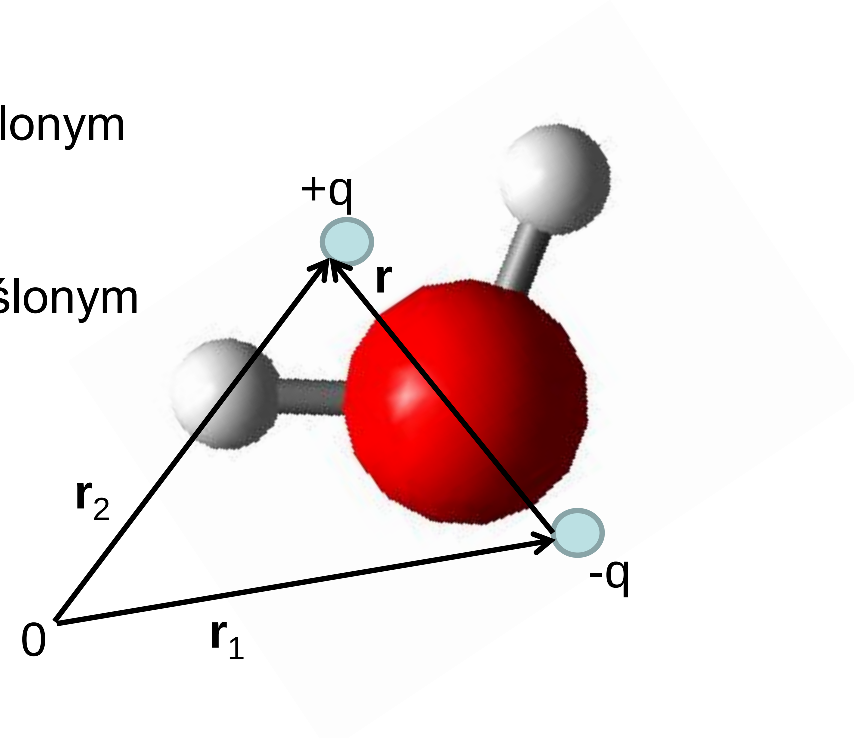
Moment dipolowy cząsteczki

Ładunek ujemny -q o położeniu określonym przez wektor $\mathbf{r}_1$

Ładunek dodatni +q o położeniu określonym przez wektor $\mathbf{r}_2$

Moment dipolowy

$\boldsymbol{\mu} = -q\, \mathbf{r}_1 + q\, \mathbf{r}_2 = q\, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = q\, \mathbf{r}$



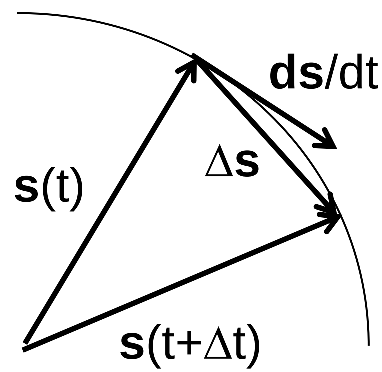
Pochodna wektora po skalarze

wektor położenia $\mathbf{s}(t) = \mathbf{i}\, s_x + \mathbf{j}\, s_y + \mathbf{k}\, s_z = (s_x, s_y, s_z)$

wektor prędkości $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}\, v_x + \mathbf{j}\, v_y + \mathbf{k}\, v_z = (v_x, v_y, v_z) =$
$= (ds_x/dt, ds_y/dt, ds_z/dt)$

wektor przyspieszenia $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}\, a_x + \mathbf{j}\, a_y + \mathbf{k}\, a_z = (a_x, a_y, a_z) =$
$= (dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt) =$
$= (d^2s_x/dt^2, d2s_y/dt^2, d^2s_z/dt^2)$

Przykład:

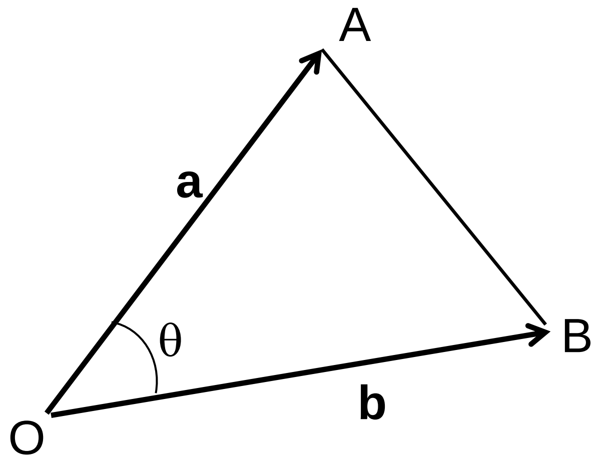


W ruchu po okręgu zmiana wektora położenia **s** jest określona przez wektor prędkości zmian d**s**/dt, który jest w każdej chwili prostopadły do **s**.

Iloczyn skalarny wektorów

a · **b** = a b cosθ = $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

gdzie a = |**a**| , b = |**b**| są długościami wektorów,
θ (0 ≤ θ ≤ π) jest kątem między nimi



Równoważność definicji iloczynu skalarnego

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (b_x - a_x)^2 + \left(b_y - a_y\right)^2 + (b_z - a_z)^2$$
$$= \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) + \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)$$
$$- 2\left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)$$
$$= a^2 + b^2 - 2\left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)$$

zatem $$ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Przykład iloczynu skalarnego

a=(4,1,-1) **b**=(2,2,1)

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 9$ iloczyn skalarny

$a=\sqrt{4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{18} = 4,2426$ długości wektorów

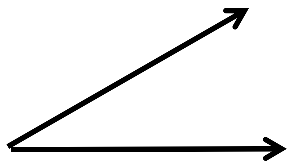
$b=\sqrt{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3$

$ab = 4,2426 \cdot 3 = 12,7279$

$\cos\theta = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) /(ab)= 0,7071$

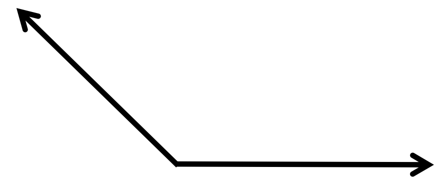
$\theta = \mathrm{acos}(0,7071) = \pi/4 = 45°$

Znak iloczynu skalarnego



$\theta<\pi/2$
$\cos\theta > 0$
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$

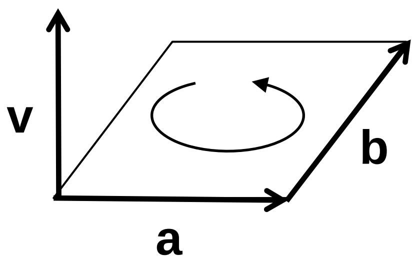
$\theta=\pi/2$
$\cos\theta = 0$
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

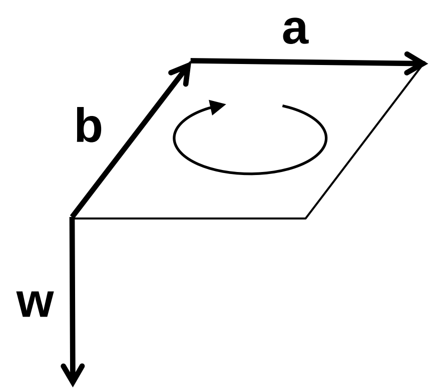


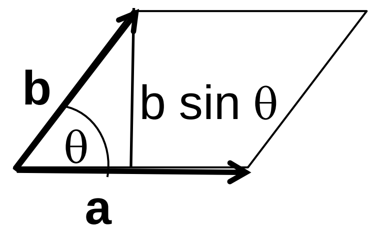
$\theta>\pi/2$
$\cos\theta < 0$
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$

Iloczyn skalarny jest równy zero, gdy dwa niezerowe wektory są prostopadłe – wektory **ortogonalne**

Iloczyn wektorowy







v = **a** × **b**

w = **b** × **a**

v = -**w**

własność antykomutacji
Iloczyn wektorowy nie jest przemienny – zmienia znak przy zamianie czynników.

długość wektora |**v**| = v = ab sinθ
kierunek wektora jest prostopadły do **a** i **b**, a zwrot jest taki, że **(a, b, v)** tworzy układ prawoskrętny – reguła śruby prawoskrętnej.

Składowe iloczynu wektorowego

Iloczyny wektorowe wersorów **i** , **j** , **k**:

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$

$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$

$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0$ $\quad$ $\mathbf{j}\times\mathbf{j}=0$ $\quad$ $\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$

$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$ lub $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$ lub $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}) = \\
&= a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k} + a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k} \\
&\quad + a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \\
&= a_xb_y\mathbf{k} - a_xb_z\mathbf{j} - a_yb_x\mathbf{k} + a_yb_z\mathbf{i} + a_zb_x\mathbf{j} - a_zb_y\mathbf{i} =
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
$$

wyznacznik macierzy

Interpolacja wielomianem

Dana jest funkcja $f(x)$ w postaci tablicy, tzn. znamy jej wartości w (n+1) punktach (węzłach)

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ ...,\ f(x_n).$$

Zadanie: znaleźć wielomian n-tego stopnia taki, że:

$$w(x_0)= f(x_0)$$
$$w(x_1)= f(x_1)$$
$$...$$
$$w(x_n)= f(x_n)$$

$w_n(x)$ nazywamy wielomianem interpolacyjnym.

<u>Cele interpolacji:</u>

- łatwe zapamiętanie postaci funkcji (współczynniki)
- wykonywanie operacji matematycznych na wielomianie
- wyznaczanie pośrednich wartości funkcji

Obliczanie wartości wielomianu

Postać naturalna wielomianu

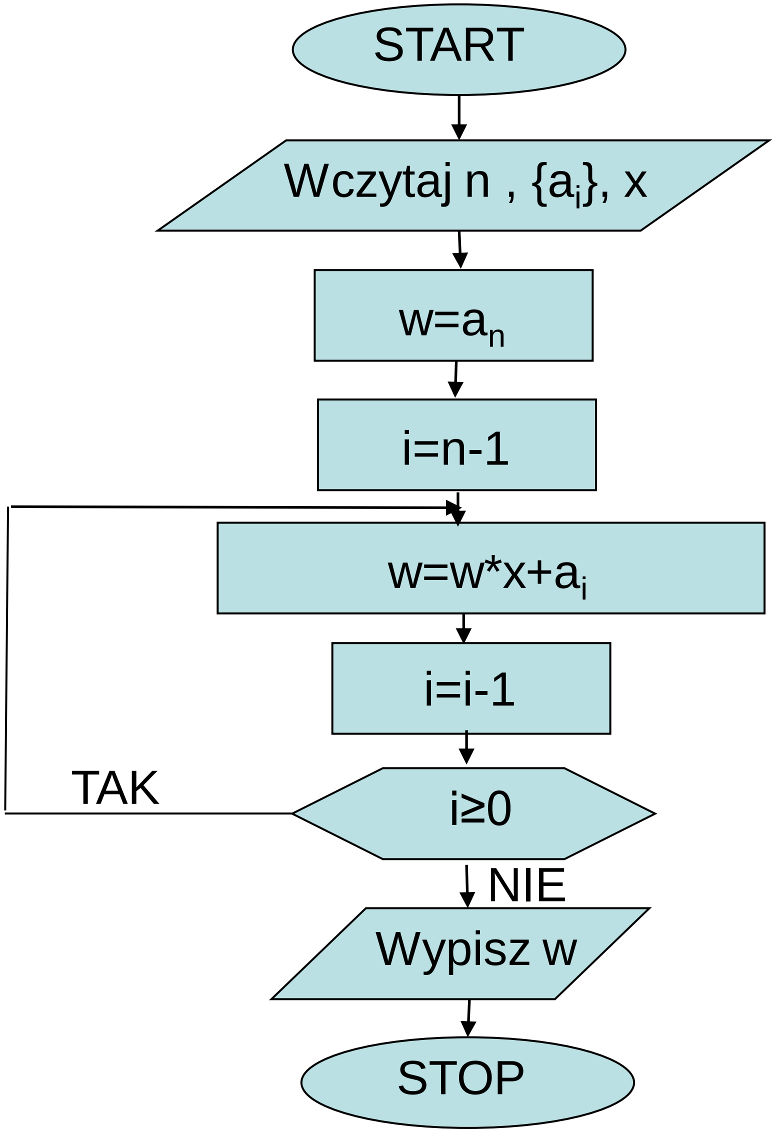
$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Obliczanie wartości wielomianu wg schematu Hornera

$$w_n(x) = (\ldots(a_n x + a_{n-1})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Obliczanie wartości wielomianu

Algorytm



Ślad działań

$w_3(x)=1+3x-2x^2+4x^3$

$n=3$ $a_0=1$ $a_1=3$ $a_2=-2$ $a_3=4$

Oblicz wartość wielomianu w punkcie x=3.

n	**w**	**i**
3	4	2
	4*3-2=10	1
	10*3+3=33	0
	33*3+1=100	-1

Wartość wielomianu w punkcie x=3 wynosi 100.

Postać Newtona wielomianu

Niech x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1} są danymi liczbami, dla których wartości wielomianu są określone (dane).

Tworzymy wielomiany pomocnicze p_k (k=0,1,2,...,n) takie, że

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x-x_0$

$p_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)$

...

$p_k(x)= (x-x_0)(x-x_1)... (x-x_{k-1})$

Wielomian $w_n(x)$ przedstawiamy jako

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$$

Jak wyznaczyć współczynniki b_k?

Wyznaczanie współczynników b_k

x	**f(x)**	**$f[x_l,x_{l+1}]$**	**$f[x_l,x_{l+1},x_{l+2}]$**
x_0	$f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
...			
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]=\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\dfrac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}$

$$b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Przykład

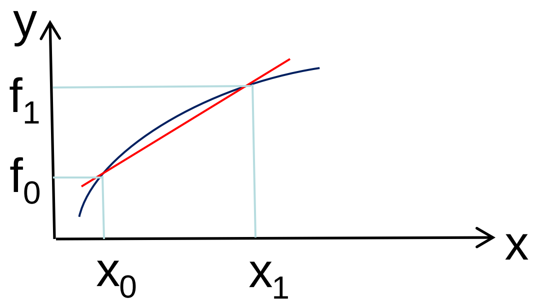
x	f(x)	f[x0,x1]	f[x0,..,x2]	f[x0,...,x3]
3	100			
5	466	183		
7	1296	415	58	
9	2782	743	82	4

$b_0 = 100$
$b_1 = 183$
$b_2 = 58$
$b_3 = 4$

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x - 3$$
$$p_2(x) = (x-3)(x-5)$$
$$p_3(x) = (x-3)(x-5)(x-7)$$

$$w_3(x) = 100 + (x-3) * (183 + (x-5) * (58 + (x-7) * 4))$$
$$= 1 + x * (3 + x * (-2 + x * 4)) =$$
$$= 1 + 3x - 2x^2 + 4x^3$$

Interpolacja liniowa



Prosta: $w_1(x)=a_0+a_1x$

$f(x_0) = f_0 = a_0+a_1x_0 \quad (/\, x_1)$
$f(x_1) = f_1 = a_0+a_1x_1 \quad (/\, x_0)$

Wyznacz a_0, a_1

$f_1 - f_0 = a_1x_1 - a_1x_0$ $\qquad a_1=(f_1-f_0)/(x_1-x_0)$
$f_0x_1-f_1x_0 = a_0x_1 - a_0x_0$ $\qquad a_0=(f_0x_1 - f_1x_0)/(x_1-x_0)$

$w_1(x)= [(f_0x_1 - f_1x_0)/(x_1-x_0)] + [(f_1-f_0)/(x_1-x_0)]\, x$
$w_1(x)= [(f_0x_1 - f_0x_0 + f_0x_0 - f_1x_0)/(x_1-x_0)] + [(f_1-f_0)/(x_1-x_0)]\, x$
$\boldsymbol{w_1(x)=f_0 + [(f_1-f_0)/(x_1-x_0)]\,(x-x_0)}$

to postać Newtona dla

$w_1(x) = b_0\, p_0(x) + b_1\, p_1(x)$, gdzie

$p_0(x) = 1$ $\qquad b_0 = f_0$
$p_1(x) = x-x_0$ $\qquad b_1 = (f_1-f_0)/(x_1-x_0)$

Zjawisko Rungego

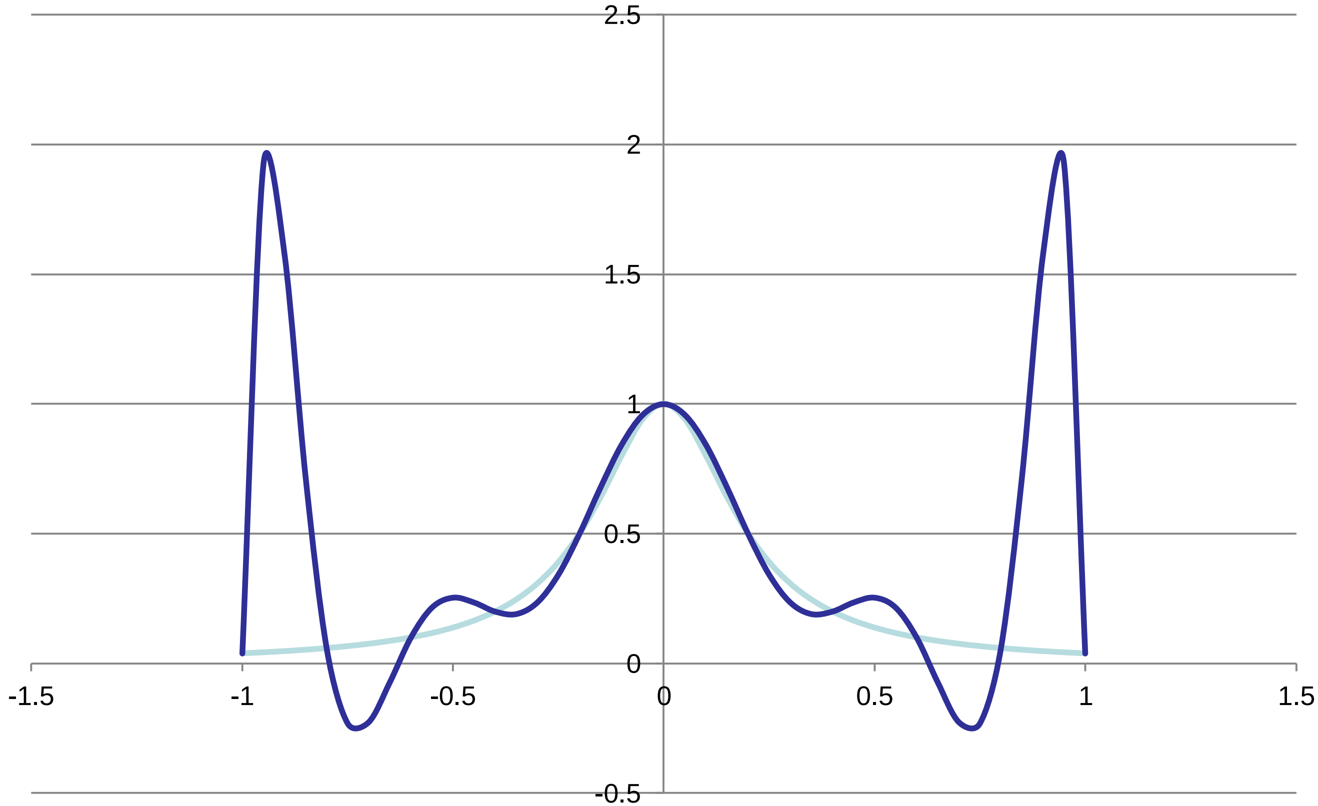
Przy interpolacji wielomianem wysokiego stopnia, np. 10-tego dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ w przedziale [-1,1] dla węzłów równoodległych

$x_i = -1 + i * 0{,}2 \qquad i = 0,1,2,...,10$

x	f(x)											w(x)
-1	**0.038462**											0.038462
-0.8	0.058824	**0.10181**										0.058824
-0.6	0.1	0.205882	**0.260181**									0.1
-0.4	0.2	0.5	0.735294	**0.791855**								0.2
-0.2	0.5	1.5	2.5	2.941176	**2.686652**							0.5
0	1	2.5	2.5	1.48E-15	-3.67647	**-6.36312**						1
0.2	0.5	-2.5	-12.5	-25	-31.25	-27.5735	**-17.6753**					0.5
0.4	0.2	-1.5	2.5	25	62.5	93.75	101.1029	**84.84163**				0.2
0.6	0.1	-0.5	2.5	-1.5E-15	-31.25	-93.75	-156.25	-183.824	**-167.916**			0.1
0.8	0.058824	-0.20588	0.735294	-2.94118	-3.67647	27.57353	101.1029	183.8235	229.7794	**220.9417**		0.058824
1	0.038462	-0.10181	0.260181	-0.79186	2.686652	6.363122	-17.6753	-84.8416	-167.916	-220.942	**-220.942**	0.038462

Zjawisko Rungego

Porównanie wykresu funkcji i wielomianu:



Dokładność obliczeń

Źródła błędów:

- błędy danych wejściowych
- błędy zaokrągleń
- błędy obcięcia
- uproszczenia modelu
- błędy przypadkowe

Błędy bezwzględne i względne:

$\tilde{x} -$ wartość przybliżona

$x -$ wartość dokładna

błąd bezwzględny $\Delta x = \tilde{x} - x$

błąd względny $r = \dfrac{\tilde{x} - x}{x} = \dfrac{\Delta x}{x}$

Zaokrąglanie i obcinanie

		zaokrąglenie		obcięcie
0,2397	$\rightarrow$	0,240	$\rightarrow$	0,239
-0,2397	$\rightarrow$	-0,240	$\rightarrow$	-0,239

zaokrąglenie do t cyfr po przecinku
liczba obarczona błędem $\pm\frac{1}{2}\cdot 10^{-t}$

Przykład powyżej: $0{,}240 \pm\frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0{,}240 \pm 0{,}0005$

Jak zaokrąglać liczby zakończone cyfrą 5?
0,2345 $\rightarrow$ 0,234
0,2435 $\rightarrow$ 0,244
redukcja błędów przy dodawaniu

Przenoszenie się błędów

Dodawanie i odejmowanie

$$\tilde{x}_1 = 2{,}33 \pm 0{,}02$$

Jaki jest błąd sumy?

$$\tilde{x}_2 = 1{,}42 \pm 0{,}03$$

$$\max(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = 2{,}33 + 0{,}02 + 1{,}42 + 0{,}03 = 3{,}80$$

$$\min(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = 2{,}33 - 0{,}02 + 1{,}42 - 0{,}03 = 3{,}70$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 3{,}75 \pm 0{,}05$$

Jaki jest błąd różnicy?

$$\max(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 2{,}33 + 0{,}02 - 1{,}42 + 0{,}03 = 0{,}96$$

$$\min(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 2{,}33 - 0{,}02 - 1{,}42 - 0{,}03 = 0{,}86$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 0{,}91 \pm 0{,}05$$

Przenoszenie się błędów

Dodawanie i odejmowanie

$$\tilde{x}_1 = x_1 \pm \Delta x_1 \qquad \tilde{x}_2 = x_2 \pm \Delta x_2$$

$$x_1 - \Delta x_1 - \left(x_2 + \Delta x_2\right) \leq \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \leq x_1 + \Delta x_1 - \left(x_2 - \Delta x_2\right)$$

$$x_1 - x_2 - \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right) \leq \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \leq x_1 - x_2 + \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = x_1 - x_2 \pm \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)$$

$$\Delta\left(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\right) = \left|\Delta x_1 + \Delta x_2\right|$$

Podobnie:

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = x_1 + x_2 \pm \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)$$

$$\Delta\left(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\right) = \left|\Delta x_1 + \Delta x_2\right|$$

Błąd bezwzględny sumy lub różnicy równa się sumie błędów bezwzględnych składników.

Znoszenie się składników przy odejmowaniu

$$\tilde{x}_1 = 0{,}5764 \pm \tfrac{1}{2}10^{-4}$$

$$\tilde{x}_2 = 0{,}5763 \pm \tfrac{1}{2}10^{-4}$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 0{,}5764 - 0{,}5763 \pm \left(\tfrac{1}{2}10^{-4} + \tfrac{1}{2}10^{-4}\right)$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 0{,}0001 \pm 0{,}0001$$

$$\Delta\left(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\right) = 0{,}0001$$

błąd bezwzględny

$$r = \frac{0{,}0001}{0{,}0001} = 1 = 100\%$$

błąd względny

Przenoszenie się błędów

Mnożenie i dzielenie

$$\tilde{x}_1 = x_1 \pm \Delta x_1 = x_1(1 \pm r_1) \qquad \tilde{x}_2 = x_2 \pm \Delta x_2 = x_2(1 \pm r_2)$$

$$\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2 = x_1(1 \pm r_1) * x_2(1 \pm r_2) = x_1 x_2 (1 \pm r_1)(1 \pm r_2) =$$

$$= x_1 x_2 (1 \pm r_1 \pm r_2 \pm r_1 r_2) \approx x_1 x_2 (1 \pm r_1 \pm r_2)$$

$$\Delta(\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2) = x_1 x_2 [1 \pm (r_1 + r_2)]$$

Podobnie: $$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \tilde{x}_1 \frac{1}{\tilde{x}_2} = x_1(1 \pm r_1)\frac{1}{x_2}(1 \pm r_2)$$

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \frac{x_1}{x_2}[1 \pm (r_1 + r_2)]$$

Błąd względny iloczynu lub ilorazu równa się sumie błędów względnych czynników.

Wykorzystanie zasad przenoszenia błędów

Oblicz pierwiastki równania kwadratowego wykonując obliczenia z dokładnością do 5 cyfr znaczących.

$$\tfrac{1}{2}x^2 - 28x + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28^2 - 4 * \tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{2}} = \sqrt{784-1} = \sqrt{783} = 27{,}982$$

$$x_1 = 28 - 27{,}982 = 0{,}018 \pm \tfrac{1}{2}10^{-3}$$

tylko 2 cyfry znaczące

$$x_2 = 28 + 27{,}982 = 55{,}982 \pm \tfrac{1}{2}10^{-3}$$

5 cyfr znaczących

$$r_1 = \frac{0{,}0005}{0{,}018} = 3 * 10^{-2}$$

$$r_2 = \frac{0{,}0005}{55{,}982} = 9 * 10^{-6}$$

Wykorzystanie zasad przenoszenia błędów

Wykorzystanie wzorów Viete'a

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\tfrac{1}{2} x^2 - 28x + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28^2 - 4 * \tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{2}} = \sqrt{784 - 1} = \sqrt{783} = 27{,}982$$

$$x_2 = 28 + 27{,}982 = 55{,}982 \pm \tfrac{1}{2} 10^{-3}$$

$$x_1 x_2 = 1 \qquad x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{55{,}982} = 0{,}017863 \pm \tfrac{1}{2} * 10^{-6}$$

$$r_1 = \frac{0{,}0000005}{0{,}017863} = 3 * 10^{-5}$$

$$r_2 = \frac{0{,}0005}{55{,}982} = 9 * 10^{-6}$$

Błędy maksymalne złożonych wyrażeń

$$y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$$ Dana zależność funkcyjna

Parametry x_i obarczone błędami. Jaki jest błąd maksymalny wielkości złożonej y?

$$\tilde{y} = y(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$$

$$\tilde{x}_1 = x_1 \pm \Delta x_1 \qquad \tilde{x}_2 = x_2 \pm \Delta x_2 \quad ... \qquad \tilde{x}_n = x_n \pm \Delta x_n$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{\tilde{x}} * \Delta x_i \right|$$

$$\Delta y = \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} * \Delta x_1 \right| + \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)_{\tilde{x}} * \Delta x_2 \right| + ... + \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} * \Delta x_n \right|$$

$$r_y = \frac{\Delta y}{y}$$

Przykład szacowania błędu maksymalnego

$$a = 320 \pm 2 \qquad \Delta a = 2$$

$$b = -300 \pm 1 \qquad \Delta b = 1$$

$$c = 10,0 \pm 0,1 \qquad \Delta c = 0,1$$

$$y = \frac{a+b}{c} = \frac{320-300}{10} = 2$$

$$\Delta y = \left|\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right) * \Delta a\right| + \left|\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right) * \Delta b\right| + \left|\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right) * \Delta c\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{c}\right) * \Delta a\right| + \left|\left(\frac{1}{c}\right) * \Delta b\right| + \left|\left(\frac{a+b}{c^2}\right) * \Delta c\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{10} * 2\right| + \left|\frac{1}{10} * 1\right| + \left|\frac{-20}{10^2} * 0,1\right| = 0,32$$

$$r_y = \frac{0,32}{2} = 0,16 = 16\%$$

Błędy standardowe złożonych wyrażeń

$$y = y\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Dana zależność funkcyjna

s_x to błędy standardowe zmiennych x. Jaki jest błąd standardowy wielkości złożonej y?

$$\tilde{y} = y\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\right)$$

$$\tilde{x}_1 = \left\{x_1, s_1\right\} \qquad \tilde{x}_2 = \left\{x_2, s_2\right\} \quad \ldots \qquad \tilde{x}_n = \left\{x_n, s_n\right\}$$

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{\tilde{x}}^2 * s_i^2 \right|}$$

$$s_y = \sqrt{\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{x}^2 * s_1^2 \right| + \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_{\tilde{x}}^2 * s_2^2 \right| + \ldots + \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)_{\tilde{x}}^2 * s_n^2 \right|}$$

Przykład szacowania błędu standardowego

$$a = 320 \pm 2 \qquad s_a = 2$$

$$b = -300 \pm 1 \qquad s_b = 1$$

$$c = 10{,}0 \pm 0{,}1 \qquad s_c = 0{,}1$$

$$y = \frac{a+b}{c} = \frac{320-300}{10} = 2$$

$$s_y = \sqrt{\left|\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 * s_a^2\right| + \left|\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 * s_b^2\right| + \left|\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 * s_c^2\right|} =$$

$$= \sqrt{\left|\left(\frac{1}{c}\right)^2 * s_a^2\right| + \left|\left(\frac{1}{c}\right)^2 * s_b^2\right| + \left|\left(\frac{a+b}{c^2}\right)^2 * s_c^2\right|} =$$

$$= \sqrt{\left|\left(\frac{1}{10}\right)^2 * 2^2\right| + \left|\left(\frac{1}{10}\right)^2 * 1^2\right| + \left|\left(\frac{-20}{10^2}\right)^2 * 0{,}1^2\right|} = 0{,}22$$

Macierze

Zacznijmy od układu równań liniowych

$a_1 x + b_1 y = c_1$ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - stałe

$a_2 x + b_2 y = c_2$ x, y - zmienne (niewiadome)

$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$ mnożymy przez b_2

$b_1 a_2 x + b_1 b_2 y = b_1 c_2$ mnożymy przez b_1

$(a_1 b_2 - b_1 a_2) x = c_1 b_2 - b_1 c_2$ odejmujemy stronami

$(a_1 b_2 - b_1 a_2) y = a_1 c_2 - c_1 a_2$ podobnie jak dla x

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \qquad y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$ wyznacznik

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad x = \frac{D_1}{D} \qquad y = \frac{D_2}{D}$$

Obliczanie wartości wyznacznika

Rozwiąż układ równań

3 x - 4 y = 1
2 x + y = 8

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 * 1 - 2(-4) = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 - 8 * (-4) = 33$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 * 8 - 1 * 2 = 22$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{33}{11} = 3 \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{22}{11} = 2$$

Wyznacznik stopnia 3

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$
$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$

a_{ij} i – numer wiersza
j – numer kolumny

Należy obliczyć wyznaczniki

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Gdy prawe strony są różne od 0, to układ równań ma rozwiązania tylko wtedy, gdy wyznacznik $D \neq 0$.

Gdy $b_1=b_2=b_3=0$, to $D_1= D_2= D_3=0$ i istnieje rozwiązanie trywialne $x_1= x_2= x_3=0$,
a nietrywialne rozwiązania tylko wtedy gdy $D=0$.

Wyznacznik stopnia n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

Minory

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{11}$$

Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Własności wyznaczników 1

1. Zamiana wierszy i kolumn nie zmienia wartości wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

transpozycja

2. Mnożenie przez stałą

$$D = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Jeżeli λ=0, to wartość wyznacznika = 0

3. Zamiana kolejności wierszy lub kolumn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników 2

4. Dodawania wyznaczników różniących się jednym wierszem (kolumną)

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Równość lub proporcjonalność dwóch wierszy lub kolumn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda a_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

6. Dodawanie wierszy lub kolumn pomnożonych przez stałą

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Macierze

Sposób zapisu przekształceń liniowych

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1$
$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2$
$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3$

Zdefiniujmy macierze

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Zdefiniujmy działania na macierzach, aby można z nich utworzyć wyrażenia równoważne układowi równań

Rodzaje macierzy

Macierz prostokątna o n wierszach i m kolumnach

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa o n wierszach i n kolumnach

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz kolumnowa

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Macierz wierszowa

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkowa

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Algebra macierzy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Równość macierzy

A = ***B*** , gdy $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$

Mnożenie macierzy przez skalar

$$c\boldsymbol{A} = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

Dodawanie macierzy

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

Uwaga: dodawane macierze muszą mieć te same rozmiary

Mnożenie macierzy

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Warunek wykonalności mnożenia: liczba kolumn w pierwszej macierzy musi być identyczna jak liczba wierszy w drugiej macierzy

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{bmatrix}$$

Niech macierz ***C*** (m×p) jest wynikiem mnożenia macierzy ***A*** (m×n) i ***B*** (n×p)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

i=1 do m , *j*=1 do p

Mnożenie macierzy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3*1+2*8 & 3*0+2*4 & 3*2+2*3 \\ 4*1+5*8 & 4*0+5*4 & 4*2+5*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 8 & 12 \\ 44 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

Jak mnożyć macierze?

B

			1	0	2
			8	4	3
A	3	2	3*1+2*8	3*0+2*4	3*2+2*3
	4	5	4*1+5*8	4*0+5*4	4*2+5*3

C

Własności iloczynu macierzy

Łączność $\quad$ ***A*(*BC*)** = **(*AB*)*C*** = ***ABC***

Rozdzielność mnożenia względem dodawania

$$\boldsymbol{A(B+C) = AB + AC}$$

Nieprzemienność mnożenia macierzy $\quad$ $\boldsymbol{AB \neq BA}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna 2×2

A jest macierzą kwadratową n×n

***A*⁻¹** jest macierzą odwrotną

I jest macierzą jednostkową

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Para macierzy odwrotnych 2×2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

Przykład: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

Macierz odwrotna n×n

Procedura obliczania macierzy odwrotnej

Macierz kwadratowa | Macierz dopełnień algebraicznych | Macierz dopełnień algebraicznych transponowana

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{zastąp\ przez}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \cdots & \boldsymbol{A_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{transponuj}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{A}}$$

Macierz dołączona

Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}: $\quad \boldsymbol{A_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad$ M_{ij} - minor

Macierz odwrotna $\quad \boldsymbol{A^{-1}} = \dfrac{\widetilde{\boldsymbol{A}}}{\det \boldsymbol{A}}$

istnieje tylko wtedy, gdy $|\boldsymbol{A}| \equiv \det \boldsymbol{A}$ jest różny od 0

Rozwiązywanie układu równań

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Przykład:

$x_1+2x_2+3x_3=1$

$2x_1+3x_2+4x_3=1$

$3x_1+4x_2+ x_3=1$

det $\boldsymbol{A}$ = 4

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{10}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{10}{4} & -\frac{8}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie macierzy odwrotnej

$$\boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{10}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{10}{4} & -\frac{8}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

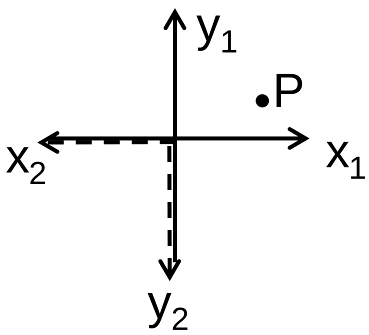
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{10}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{10}{4} & -\frac{8}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1=-1$

$x_2=1$

$x_3=0$

Macierze a przekształcenia geometryczne



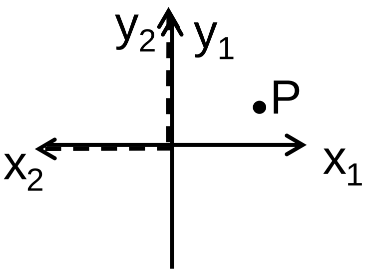
inwersja

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$$

det **Q** = (-1)(-1)-0=1

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$



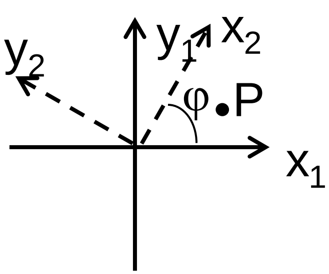
odbicie w płaszczyźnie

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$$

det **Q** = (-1)(+1)-0=-1

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$



obrót

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$$

det **Q** = $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$

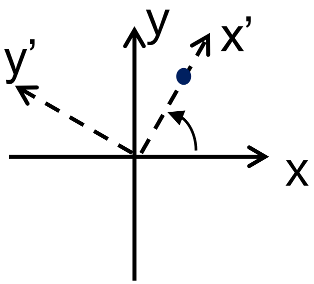
$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Macierze transformacji geometrycznych **Q** są macierzami ortogonalnymi

Przekształcenie macierzy przez podobieństwo

Istnieje odwzorowanie ***A***, które przekształca $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$: $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$



Jeżeli wektory **x'** i **y'** przekształcane są do wektorów **x** i **y** poprzez transformację **Q**, jak wygląda odwzorowanie wektora **x'** w wektor **y'** ?

Jeżeli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}'$ oraz $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, to $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'$

Jeżeli macierz **Q** jest nieosobliwa, to

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'$$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}'$$

Macierze **A** i **B** są swoimi transformatami przekształconymi przez podobieństwo, a ich wyznaczniki są równe

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{Q}^{-1})\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{det}(\boldsymbol{Q}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{det}(\boldsymbol{Q})}\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{det}(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$$

Przekształcenie - przykład

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_2 \end{aligned}}$$

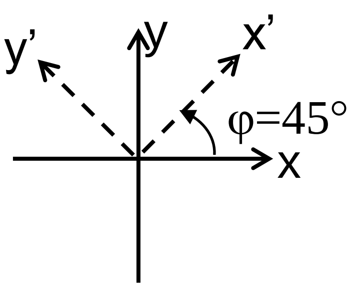
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{y} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2'$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2'$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$$



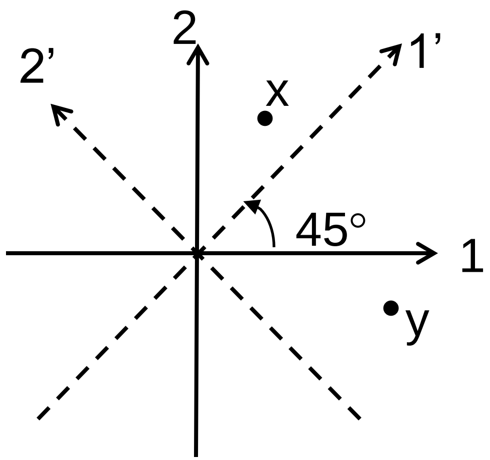
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' - x_2' &= y_1' \\ -x_1' - x_2' &= y_2' \end{aligned}}$$

Przekształcenie - przykład



$$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$(x_1,x_2)=(1,2)$
$(y_1,y_2)=(3,-1)$

1+2=3 $\quad x_1+x_2=y_1$

1-2=-1 $\quad x_1-x_2=y_2$

$$(x_1',x_2')=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(y_1',y_2')=\left(\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x_1'-x_2'\\-x_1'-x_2'\end{aligned}}\begin{aligned}&=y_1'\\&=y_2'\end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne macierzy

λ – skalar , $\mathbf{A}(n\times n)$ $\mathbf{I}(n\times n)$ $\mathbf{K}(n\times n)$

$\mathbf{K} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ macierz charakterystyczna macierzy **A**

$\det\mathbf{K} = K(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$ równanie charakterystyczne macierzy

$K(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$

Pierwiastki wielomianu $K(\lambda)$: λ_1 , λ_2 , ... , λ_{n-1} , λ_n nazywamy pierwiastkami charakterystycznymi (wartościami własnymi) macierzy **A**.

Jeżeli $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, to macierz charakterystyczna macierzy **B**
$\mathbf{K} = \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{Q}$, a wyznacznik
$\det\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}\right| = \left|\mathbf{Q}^{-1}\right| \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| \left|\mathbf{Q}\right| = \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$

Dwie macierze związane przekształceniem przez podobieństwo mają te same pierwiastki charakterystyczne.

Pierwiastki charakterystyczne

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-1=0 \qquad \lambda^2-1-1=0 \qquad \lambda^2=2 \qquad \lambda_1=\sqrt{2},\ \lambda_2=-\sqrt{2}$$

$$\det(B-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-1=0 \qquad \lambda^2-1-1=0 \qquad \lambda^2=2 \qquad \lambda_1=\sqrt{2},\ \lambda_2=-\sqrt{2}$$

Macierz diagonalna

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix} d_1-\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3-\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathbf{D}-\lambda\mathbf{I}\right|=\left(d_1-\lambda\right)\left(d_2-\lambda\right)\left(d_3-\lambda\right)\ldots\left(d_n-\lambda\right)=0$$

$$\lambda_1=d_1,\ \lambda_2=d_2,\ \lambda_3=d_3,\ldots,\ \lambda_n=d_n$$

Jeżeli istnieje takie przekształcenie przez podobieństwo, które macierz **A** sprowadzi do macierzy diagonalnej **D** , to elementy na przekątnej macierzy diagonalnej są zarazem pierwiastkami charakterystycznymi (wartościami własnymi) macierzy **A**.

Przykład diagonalizacji macierzy

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi + \sin\varphi & \cos\varphi - \sin\varphi \\ \cos\varphi - \sin\varphi & -\cos\varphi - \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi & \cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi & -\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\varphi + \sin 2\varphi & \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi - \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

Aby wyzerować elementy niediagonalne:

$$\cos 2\varphi - \sin 2\varphi = 0 \qquad \cos 2\varphi = \sin 2\varphi \qquad \tan 2\varphi = 1 \qquad 2\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \varphi = \frac{\pi}{8}$$

Po przekształceniu otrzymujemy macierz:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \sqrt{2}\,, \lambda_2 = -\sqrt{2}$$

Pierwiastki i wektory charakterystyczne

$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ jest przekształceniem diagonalizującym macierz **A**.

Kolumny macierzy **C** są wektorami charakterystycznymi.

Jeżeli macierz **C** jest ortogonalna, to $\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{C}^{T}$, a $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ = $\mathbf{C}^{T}\mathbf{AC}$.

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8}\\ \sin\frac{\pi}{8} & \cos\frac{\pi}{8}\end{bmatrix}$$

Obustronne pomnożenie macierzy **A** przez wektor charakterystyczny daje wartość charakterystyczną:

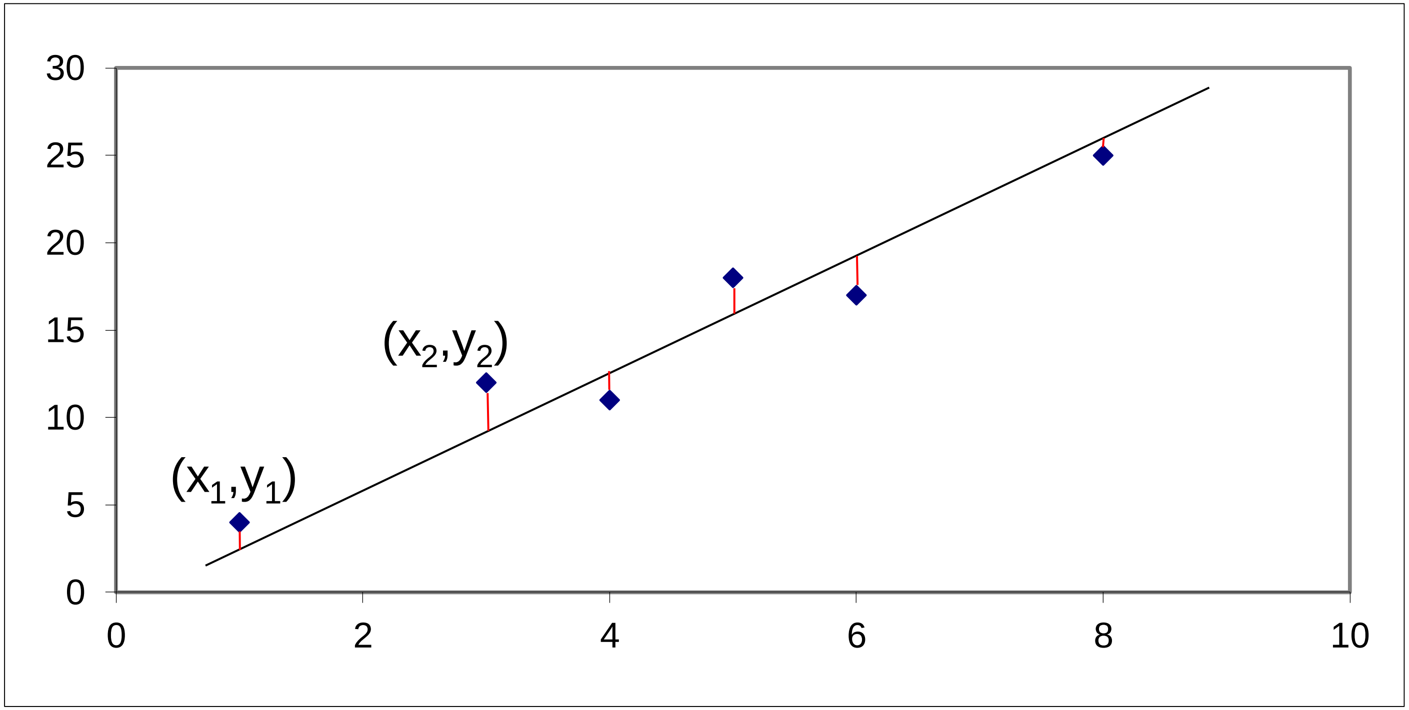
$$\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Ogólnie:

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_{\mathbf{k}}=\lambda_k \qquad k=1,2,...,n$$

Regresja liniowa



Regresja liniowa:

$y=a*x+b$

Zadanie: Wyznaczyć optymalne wartości a oraz b.

Regresja liniowa

Podstawowe założenia:

1) Rozkład y_i wokół linii prostej jest losowy
2) Wariancja σ_y^2 jest niezależna od x

Metoda najmniejszych kwadratów: $\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a\,x_i + b)\right]^2$

Wyznaczamy min Φ(a,b) względem a oraz b:

$$\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a\,x_i + b)\right](x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a\,x_i + b)\right] = 0$$

Regresja liniowa

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań ze względu na a, b:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Regresja liniowa

Estymata wariancji dla wartości y_i:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a\,x_i - b\right)^2}{n-2}$$

Estymata wariancji dla parametrów a oraz b:

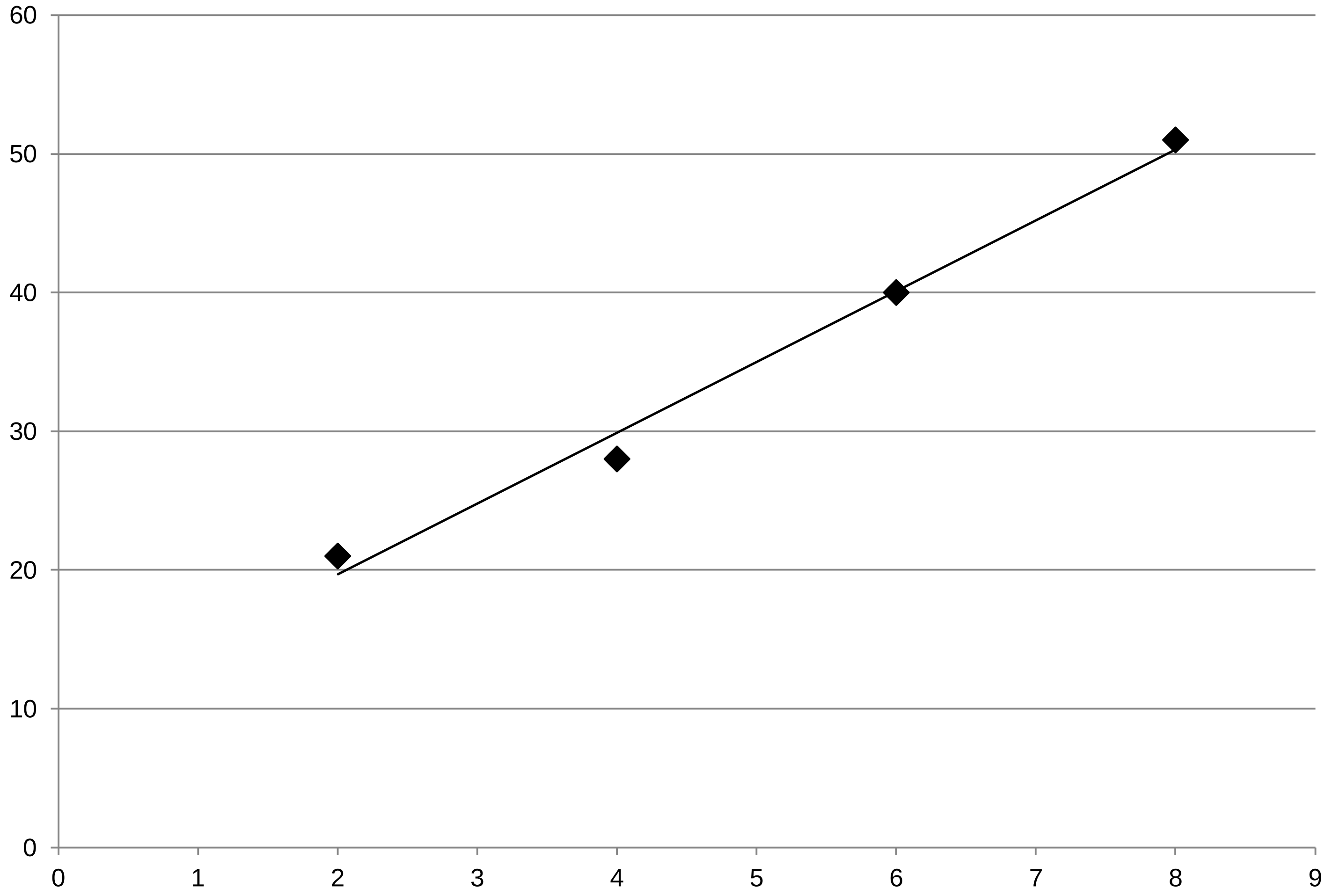
$$s_a^2 = s^2 \frac{n}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad s_b^2 = s^2 \frac{\left(\sum x_i^2\right)}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Współczynnik korelacji liniowej dla próbki r

$$r = \frac{cov\left(x_i, y_i\right)}{\sqrt{var\left(x_i\right) var\left(y_i\right)}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\, S_{yy}}}$$

Wartość r zawiera się między -1 i +1. r>0 wskazuje na zależność dodatnią, a r<0 na zależność ujemną między x oraz y. r=0 wskazuje na brak zależności liniowej między x oraz y.

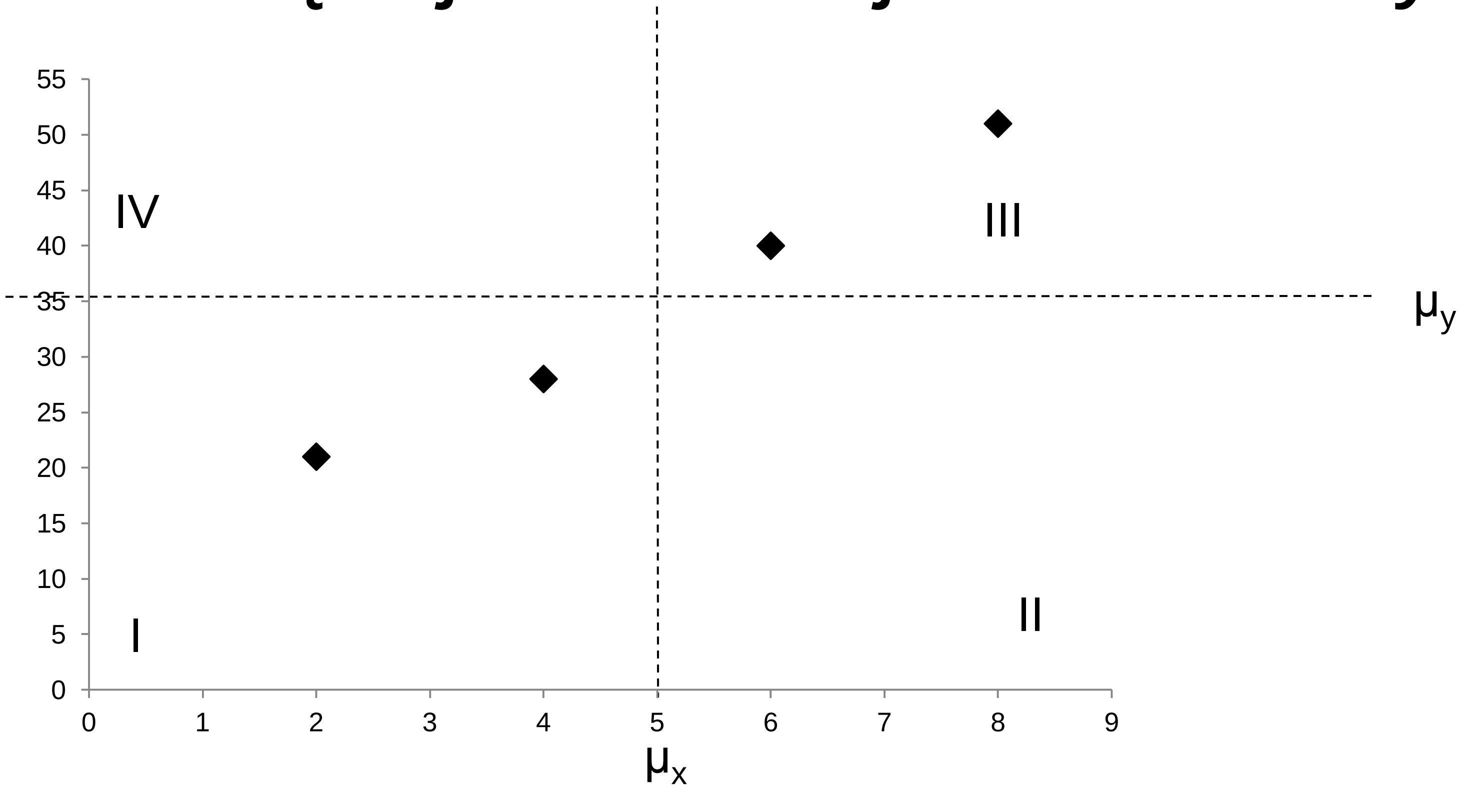
Regresja liniowa - przykład



	x	y	x*x	x*y	y-a*x-b	(y-a*x-b)^2	x-xsr	y-ysr
	2	21	4	42	1,3	1,69	-3	-14
	4	28	16	112	-1,9	3,61	-1	-7
	6	40	36	240	-0,1	0,01	1	5
	8	51	64	408	0,7	0.49	3	16
Sum:	**20**	**140**	**120**	**802**	**0,0**	**5,80**	**0**	**0**

a=	5,1		
b=	9,5		
s^2=	2,9	s=	1,7029
sa^2=	0,145	sa=	0,3808
sb^2=	4,35	sb=	2,0857
xsr=	5	n*cov(x,y)=	102,0
ysr=	35	n*var(x)=	20,0
		n*var(y)=	526,0
		r(x,y)=	0,9945

Więcej o korelacji - kwadranty



Kwadranty:

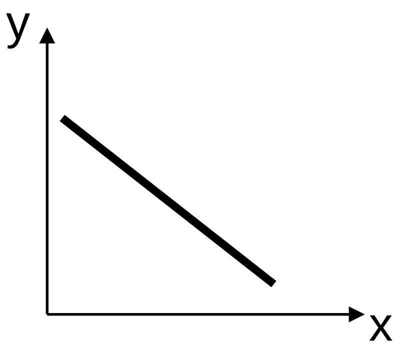
I	$x-\mu_x<0$	$y-\mu_y<0$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)>0$
II	$x-\mu_x>0$	$y-\mu_y<0$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)<0$
III	$x-\mu_x>0$	$y-\mu_y>0$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)>0$
IV	$x-\mu_x<0$	$y-\mu_y>0$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)<0$

$$cov(x,y)=\frac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n}$$

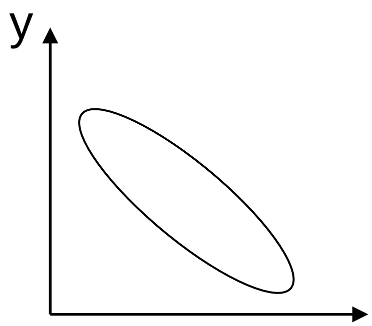
$$-\infty < cov(x,y) < \infty$$

Współczynnik korelacji liniowej

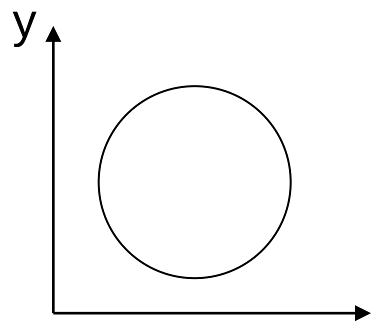
$$r = \frac{cov(x_i, y_i)}{\sqrt{var(x_i)var(y_i)}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\,S_{yy}}}$$



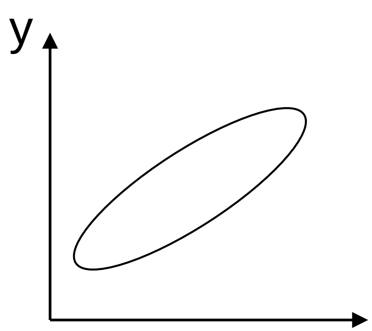
r=-1



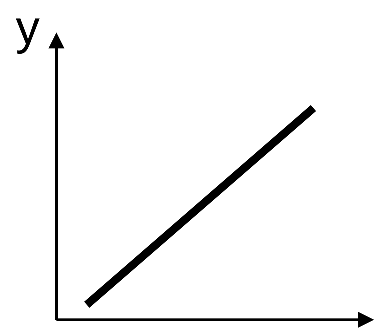
-1<r<0



r=0



0<r<1



r=1

Regresja liniowa jako układ równań

$$\begin{cases} y_1 - ax_1 - b = \varepsilon_1 \\ y_2 - ax_2 - b = \varepsilon_2 \\ y_3 - ax_3 - b = \varepsilon_3 \\ \\ y_n - ax_n - b = \varepsilon_n \end{cases}$$

Niewiadome: a , b

Szukamy rozwiązania takiego, aby uzyskać $\min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right)^2$$

Zapis macierzowy:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Układ równań nadmiarowy

$$[\mathbf{y}-\mathbf{Ja}]=\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \dots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}=[\mathbf{y}-\mathbf{Ja}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{y}-\mathbf{Ja}]$$

Poszukujemy rozwiązania **a**, dla którego $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}$ jest minimalne.

$$[\mathbf{y}-\mathbf{Ja}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{y}-\mathbf{Ja}]=\left[\mathbf{y}^{\mathbf{T}}-\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\right][\mathbf{y}-\mathbf{Ja}]=$$

$$=\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}+\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{Ja}-\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}-\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{Ja}=\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}+\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{Ja}-2\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{a}}=2\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{Ja}-2\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{Ja}=\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$$

$$\boxed{\mathbf{a}=\left(\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}\right)^{-1}\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}}$$

Tak obliczone wartości parametrów **a** zapewniają minimalizację sumy kwadratów odchyleń od prostej

Przykład przedstawienia macierzowego

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 20 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = 120 * 4 - 20^2 = 80$$

$$\left(\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{80} & -\frac{20}{80} \\ -\frac{20}{80} & \frac{120}{80} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 802 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{4}{80} & -\frac{20}{80} \\ -\frac{20}{80} & \frac{120}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 802 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}1 \\ 9{,}5 \end{bmatrix}$$

Wariancje

Wariancja dla zmiennej y $$s_y^2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}}{n-2}$$ (n-2) to liczba stopni swobody w układzie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{Ja} = \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5{,}1 \\ 9{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3 \\ -1{,}9 \\ -0{,}1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{4-2} \begin{bmatrix} 1{,}3 & -1{,}9 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}3 \\ -1{,}9 \\ -0{,}1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} = \frac{5{,}8}{2} = 2{,}9$$

Wariancje i kowariancja dla parametrów

$$\begin{bmatrix} s_a^2 & \operatorname{cov}(a,b) \\ \operatorname{cov}(a,b) & s_b^2 \end{bmatrix} = s_y^2 \left(\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}\right)^{-1} = 2{,}9 * \begin{bmatrix} \frac{4}{80} & -\frac{20}{80} \\ -\frac{20}{80} & \frac{120}{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11{,}6}{80} & -\frac{58}{80} \\ -\frac{58}{80} & \frac{348}{80} \end{bmatrix}$$

Współczynnik korelacji liniowej dla parametrów

$$r(a,b) = \frac{\operatorname{cov}(a,b)}{\sqrt{s_a^2 s_b^2}} = \frac{-58}{\sqrt{11{,}6 * 348}} = -0{,}91$$

Wysoka wartość |r(a,b)| oznacza, że nie można równocześnie wyznaczyć obu parametrów a, b

Jakobian

W regresji liniowej funkcja modelu to prosta y= a*x + b.
Jakobian to macierz pochodnych po parametrach a, b we wszystkich punktach danych i = 1,2,...,n

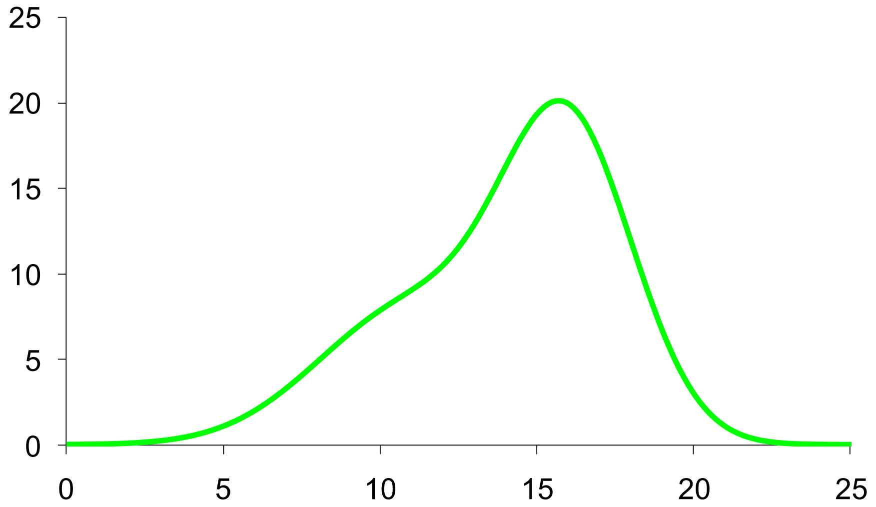
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_1 & \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_2 & \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_2 \\ \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_n & \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$$

Jeżeli do danych chcielibyśmy dopasować wielomian 2-go stopnia
$y = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$, to jakobian miałby postać:

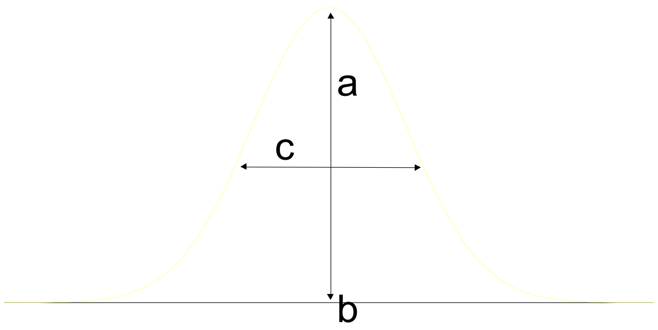
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial a_0}\right)_1 & \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)_1 & \left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a_0}\right)_2 & \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)_2 & \left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\right)_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a_0}\right)_n & \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)_n & \left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\right)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}$$

Rozkład złożonego pasma

Pasmo doświadczalne



Należy dopasować do pasma krzywe Gaussa w postaci



$$P_k(x) = a_k e^{-\frac{(x-b_k)^2}{2c_k^2}}$$

a - wysokość
b - położenie
c - szerokość

Metoda najmniejszych kwadratów

$\{a_k\}$, $k=1:M$, M dopasowanych parametrów

Funkcja błędu (suma po n punktach):
$\Phi\{a_k\} = \Sigma_j [y_j(\text{dośw}) - y_j(\{a_k\}]^2$

Zadanie
Minimalizować Φ modyfikując zbiór $\{a_k\}$
startując z wartości początkowych $\{a_k\}_0$

Funkcja błędu i jakobian

$$P_k(x) = a_k e^{-\frac{(x-b_k)^2}{2c_k^2}}$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^{N} P_k(x)$$

Rozkład na N pasm

Elementy jakobianu

$$\frac{\partial P_k}{\partial a_k} = e^{-\frac{(x-b_k)^2}{2c_k^2}}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_k} = a_k \frac{(x-b_k)}{c_k^2} e^{-\frac{(x-b_k)^2}{2c_k^2}}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial c_k} = a_k \frac{(x-b_k)^2}{c_k^3} e^{-\frac{(x-b_k)^2}{2c_k^2}}$$

Algorytm

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial a_1}\right)_1 & \left(\frac{\partial P}{\partial b_1}\right)_1 & \left(\frac{\partial P}{\partial c_1}\right)_1 & \left(\frac{\partial P}{\partial a_2}\right)_1 & \dots \\ \left(\frac{\partial P}{\partial a_1}\right)_2 & \left(\frac{\partial P}{\partial b_1}\right)_2 & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \left(\frac{\partial P}{\partial a_1}\right)_n & \left(\frac{\partial P}{\partial b_1}\right)_n & \dots & \dots & \end{bmatrix} \qquad \Delta a = \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta b_1 \\ \Delta c_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta b_2 \\ \Delta c_2 \end{bmatrix}$$

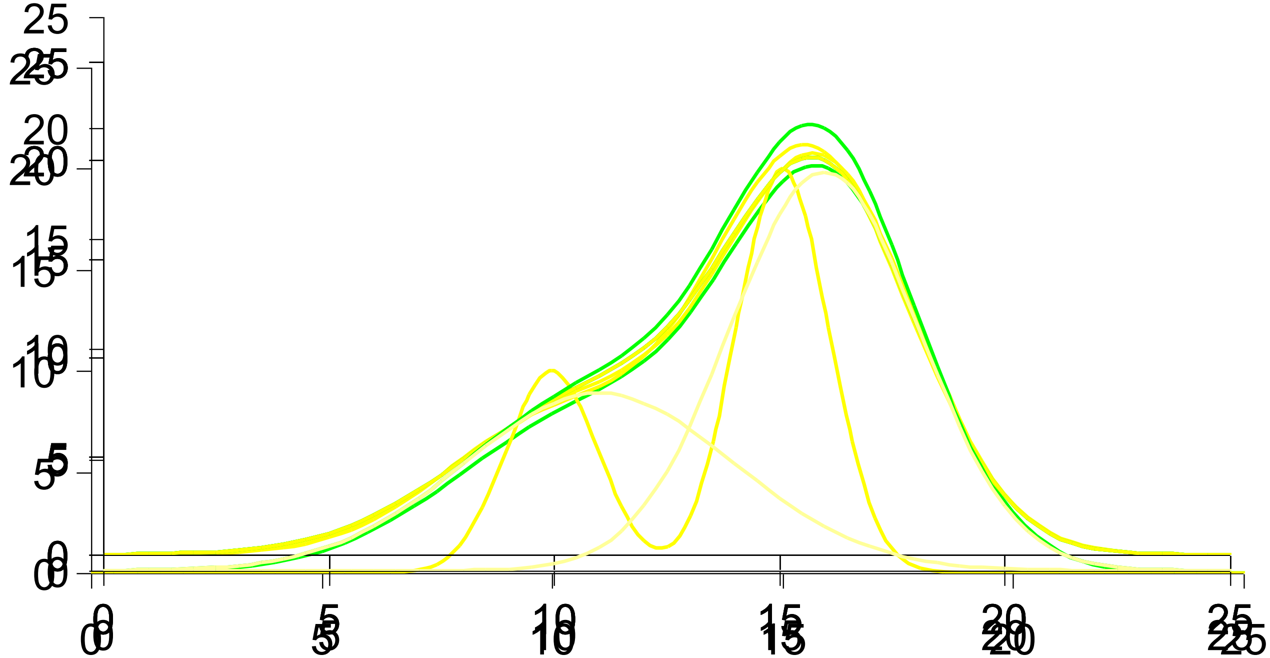
Poprawiona wartość $\{a_k\}$

$$\Delta a = \left(J^T J\right)^{-1} J^T Y$$

Metoda najmniejszych kwadratów

Pasmo rozłożone na 2 składowe

Krok 4



Statystyka - podstawowe definicje

- Statystyka – badanie zbiorów danych (statystyka matematyczna i opisowa)
- Przedmiot analizy statystycznej – obserwacja, zdarzenie w relacji wartość ↔ częstotliwość (rozkład)
- Populacja – zbiór wszystkich danych
- Próbka n-elementowa – n obserwacji
- Cel analizy statystycznej – ustalenie relacji między próbką a populacją

Cechy statystyczne

Cechy stałe – przyporządkowanie do zbiorowości (rzeczowe, przestrzenne, czasowe)

Cechy zmienne – mierzalne lub niemierzalne

Typy danych

Ilościowe/numeryczne

Dyskretne (całkowite)

Przykłady:

•Liczba osób

•Orzeł lub reszka

•Kostka do gry

Ciągłe (rzeczywiste)

Przykłady:

•Temperatura

•Waga

•Długość

Jakościowe/
nienumeryczne

Przykłady:

•Kolor

•Barwa głosu

Prawdopodobieństwo = P(A)

A, B są podzbiorami należącymi do zbioru Ω

Własności prawdopodobieństwa

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Jeżeli A i B wykluczają się wzajemnie, wtedy

  P(A lub B) = P(A) + P(B)
- Jeżeli A i B nie wykluczają się wzajemnie, wtedy

  P(A lub B) = P(A) + P(B) – P(A i B)

Obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A) = n_A/n$

gdzie n_A – liczba zdarzeń realizujących A

n – ogólna liczba zdarzeń

Prosty rozkład

Rzut kostką do gry:

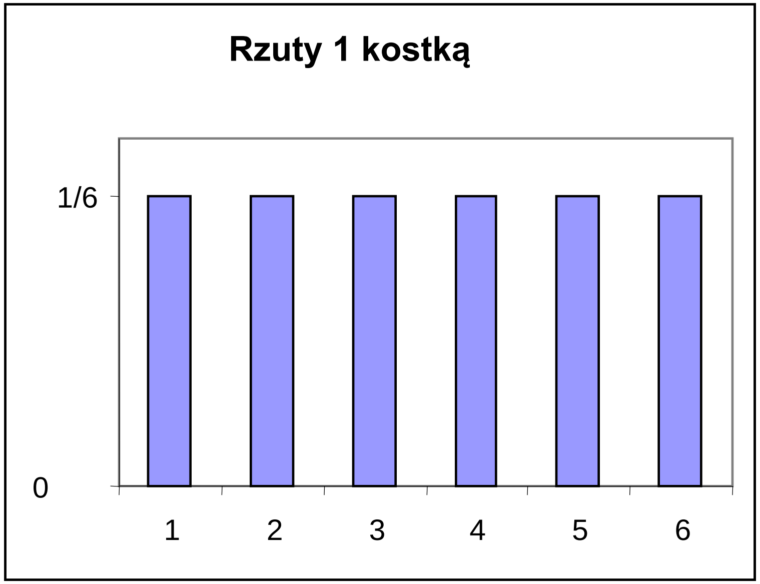
$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

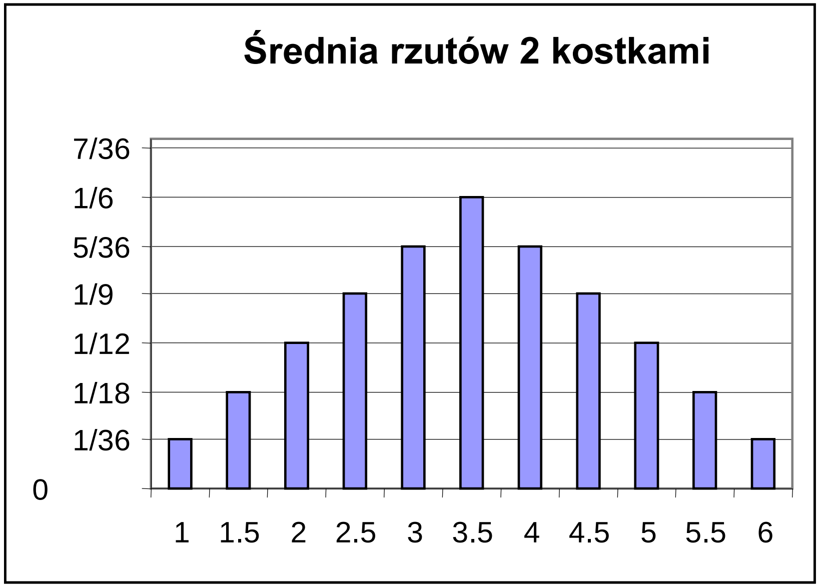
Średnia arytmetyczna: $$\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k$$

Wariancja: $$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} P_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2$$

Odchylenie standardowe: $$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Doświadczenia z kostką





$$\bar{x} = 7/2 = 3.5$$

$$\sigma^2 = 35/12$$

$$\sigma = 1.7078$$

$$\bar{x} = 7/2 = 3.5$$

$$\sigma^2 = 35/24$$

$$\sigma = 1.2076$$

Kostka do gry - obliczenia

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k$$

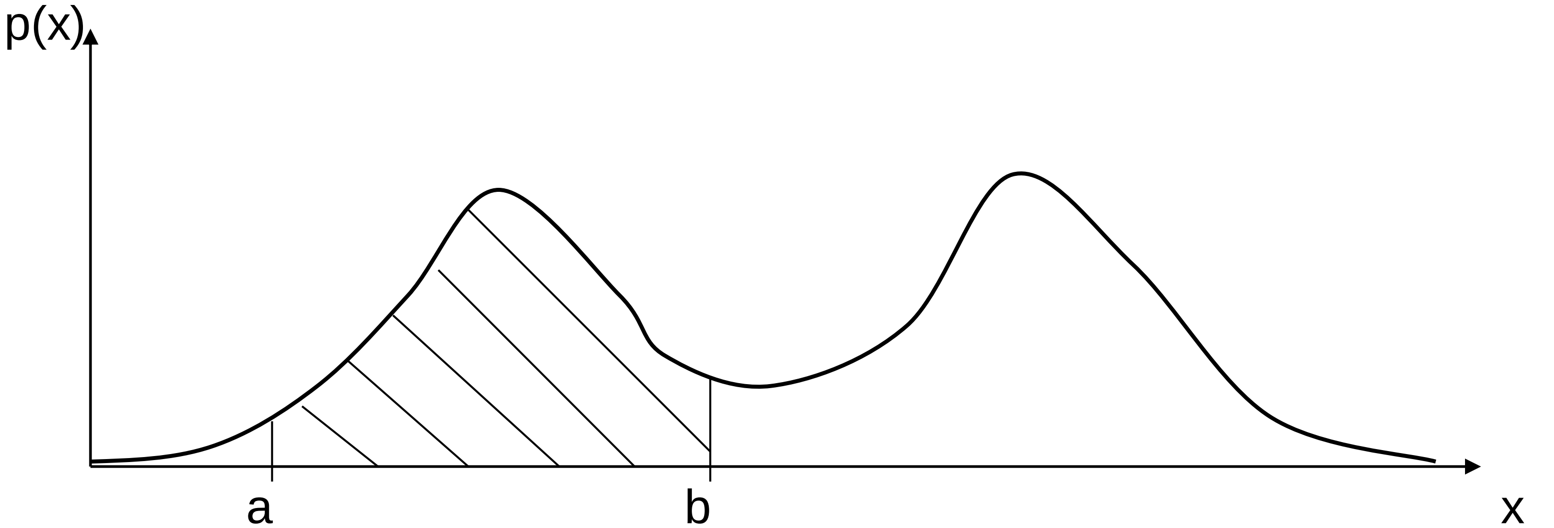
$$\overline{x} = \tfrac{1}{6}1 + \tfrac{1}{6}2 + \tfrac{1}{6}3 + \tfrac{1}{6}4 + \tfrac{1}{6}5 + \tfrac{1}{6}6 = \tfrac{7}{2}$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} P_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{6}\left(1 - \tfrac{7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(2 - \tfrac{7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(3 - \tfrac{7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(4 - \tfrac{7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(5 - \tfrac{7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(6 - \tfrac{7}{2}\right)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{6}\left[\left(-\tfrac{5}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2\right] = \tfrac{35}{12}$$

Rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej ciągłej



p(x) – gęstość prawdopodobieństwa

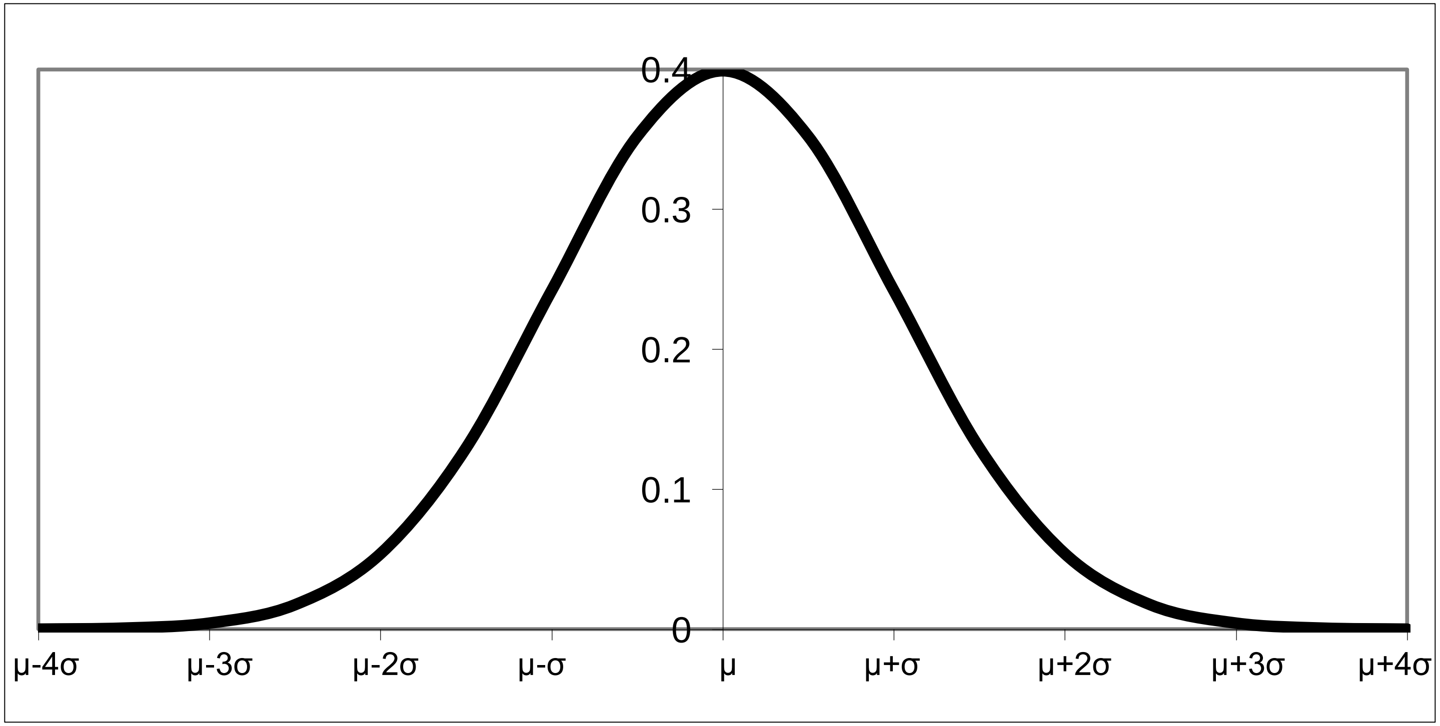
$$P\left(a\langle x\langle b\right)=\int_{a}^{b} p\left(x\right)dx$$

$$P\left(-\infty\langle x\langle \infty\right)=\int_{-\infty}^{\infty} p\left(x\right)dx=1$$

Rozkład Gaussa

Funkcja rozkładu Gaussa

$$p(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Podstawowe własności rozkładu Gaussa

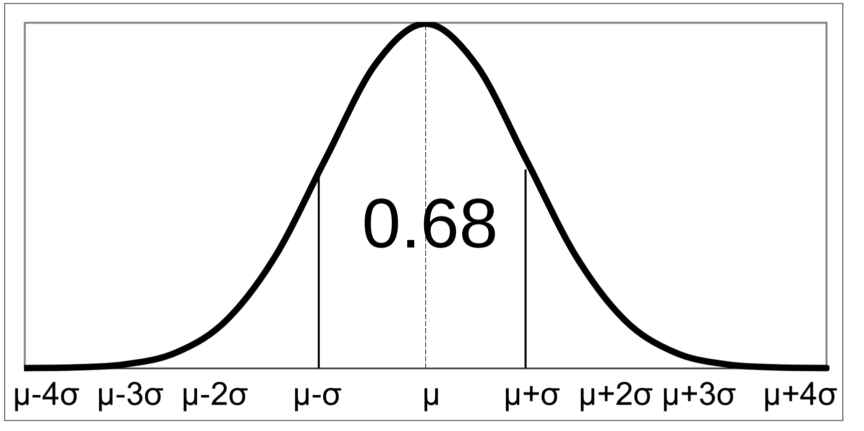
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = P(-\infty \le x \le \infty) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\mu} p(x)dx = P(-\infty \le x \le \mu) = \tfrac{1}{2}$$

$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = 0.6827$$

$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma) = 0.9973$$



Jeżeli potrzebne są okrągłe liczby:

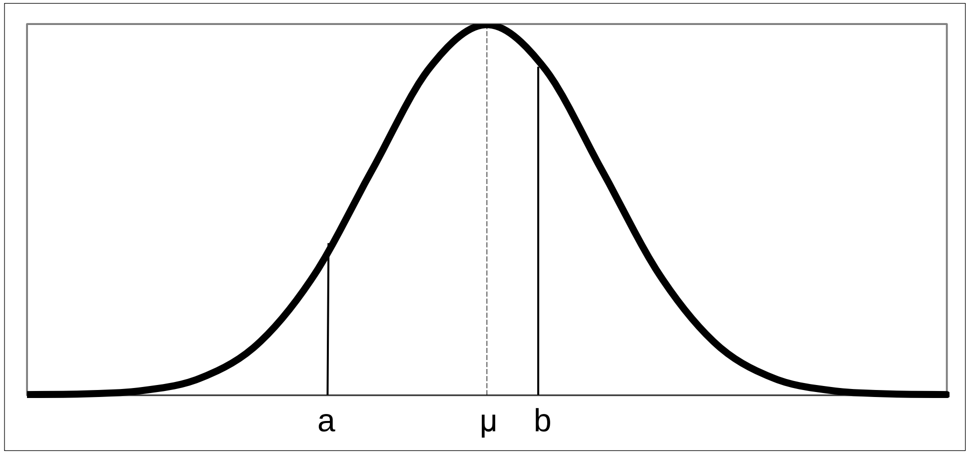
$$P(\mu-1.645\sigma \le x \le \mu+1.645\sigma) = 0.90 = 90\%$$

$$P(\mu-1.96\sigma \le x \le \mu+1.96\sigma) = 0.95 = 95\%$$

$$P(\mu-2.576\sigma \le x \le \mu+2.576\sigma) = 0.99 = 99\%$$

$$P(\mu-3.290\sigma \le x \le \mu+3.290\sigma) = 0.999 = 99.9\%$$

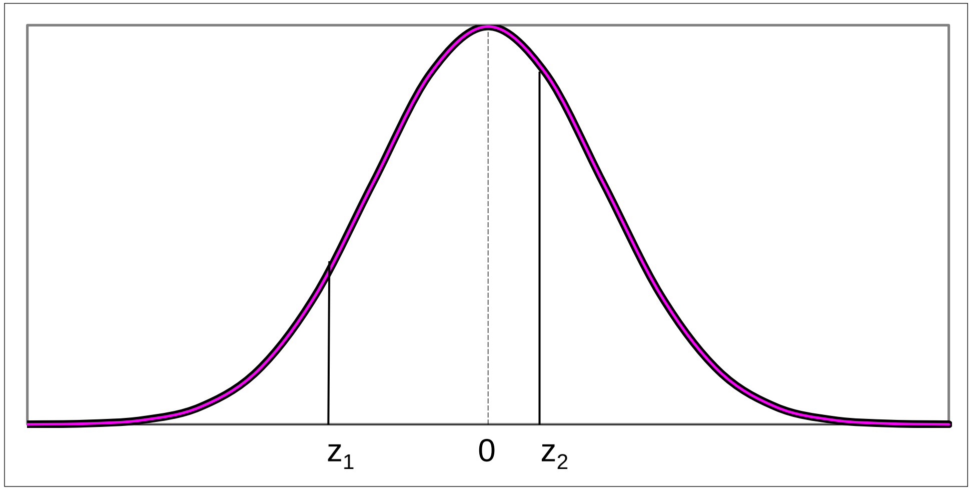
Rozkład Gausса



Jak obliczyć?

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b p(x)dx \ ?$$

Znormalizowany rozkład Gaussa



gdzie:

$$P(z_1 \le z \le z_2) = \int_{z_1}^{z_2} p(z)dz$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

z jest zmienną zredukowaną

Przykład

Miesięczne płace w fabryce mają postać rozkładu Gaussa ze średnią $\mu=3280$ zł i odchyleniem standardowym $\sigma=360$ zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pracownik zarabia:

a) Mniej niż 2800 zł

b) Więcej niż 3800 zł

c) pomiędzy 2800 zł a 3800 zł

$\mu=$	3280		
$\sigma=$	360		
z1=(2800-3280)/360=	-1.33333	P(z<-1.3333)=	0.0912
z2=(3800-3280)/360=	1.444444	P(z>1.4444)=P(z<-1.4444)=	0.0743

$$P(2800<x<3800)=P(-1.3333<z<1.4444)=1-P(z<-1.3333)-P(z<-1.4444)=$$

$$=1-0.0912-0.0743=0.8345$$

Centralne Twierdzenie Graniczne

Jeżeli x jest średnią N niezależnych zmiennych, x_i, gdzie i=1,2,3,...,N, pochodzących z rozkładu o wartości środkowej μ i wariancji σ^2, to rozkład dla x

(a) ma wartość oczekiwaną < x > = μ,

(b) ma wariancję V(x) = σ^2/N

(c) przyjmuje postać rozkładu Gaussa, gdy N $\to \infty$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

Wniosek: Odchylenie standardowe dla średniej jest mniejsze niż dla rozkładu pojedynczych pomiarów

Przedział dla wartości środkowej

W serii n=144 pomiarów średnia wynosi $x = 60$ a estymata odchylenia standardowego $s_x = 9$. Wyznacz przedział, w którym wartość środkowa rozkładu znajduje się z prawdopodobieństwem 0.95.

Rozwiązanie:

$$s_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{144}} = 0.75$$

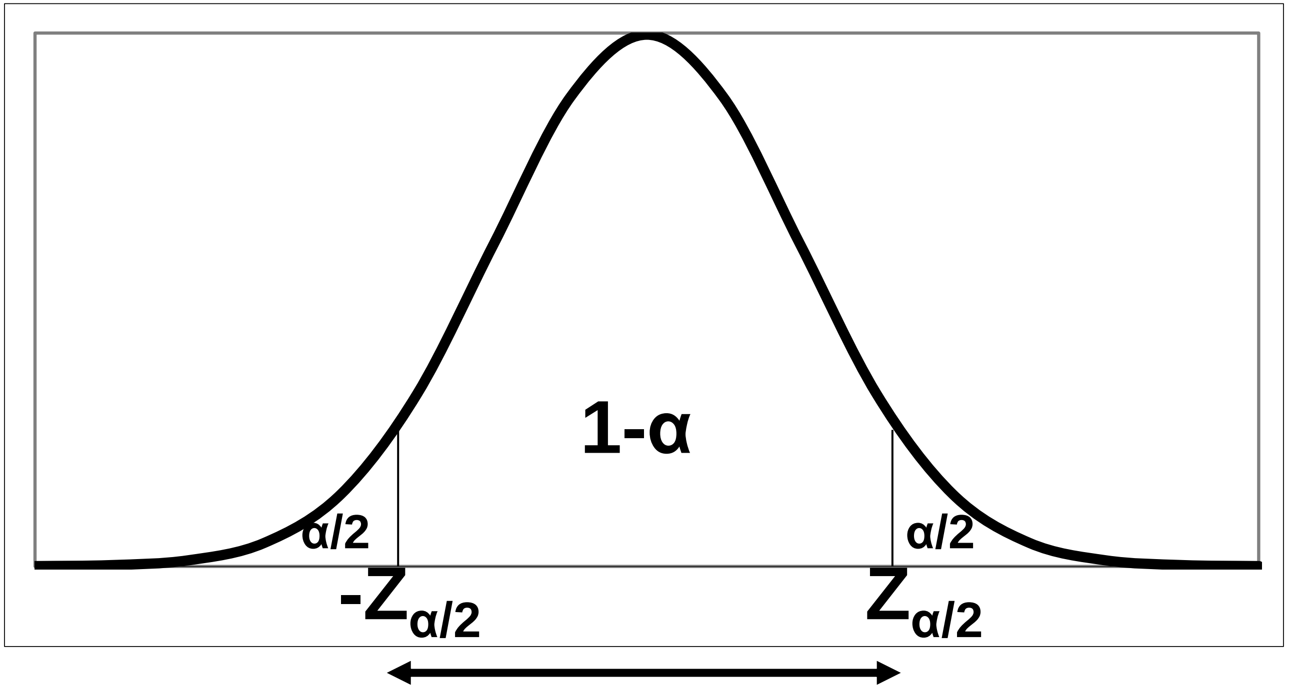
Dla P=0.95 $z_{krytyczna}$ = 1.96

$$P\left(x - 1.96 s_x \le \mu \le x + 1.96 s_x\right) = 0.95$$

$$P\left(60 - 1.96 * 0.75 \le \mu \le 60 + 1.96 * 0.75\right) = P\left(60 - 1.5 \le \mu \le 60 + 1.5\right) =$$

$$P\left(58.5 \le \mu \le 61.5\right) = 0.95$$

Poziomy ufności i istotności



Centralny przedział ufności = $\mu \pm Z_{\alpha/2} * \sigma$

α – współczynnik istotności

$(1-\alpha)$ – współczynnik ufności

$Z_{\alpha/2}$ – wartość krytyczna

Test statystyczny dla μ – testowanie hipotezy

„Czy wartość środkowa dla populacji wynosi μ_0 ?”

Test statystyczny jest oparty o koncepcję dowodu przez zaprzeczenie i składa się z 5 części:

1. Hipoteza zerowa oznaczona H_0.
2. Hipoteza alternatywna oznaczona H_a.
3. Test statystyczny oznaczony T.S.
4. Obszar odrzucenia oznaczony O.O.
5. Wniosek

Przykład 1

Test zużycia paliwa dla 100 samochodów:

$$\bar{x} = 6.28 l / 100km \qquad s_x = 0.80 l / 100km$$

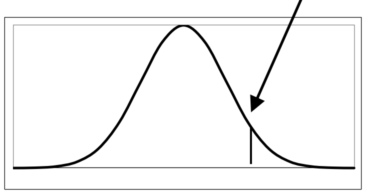
Czy na poziomie istotności α=0.05 możemy zaakceptować zużycie paliwa μ_0=6,10 *l/100km* podane przez producenta ?

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_a : \mu > \mu_0$$

T.S. Rozkład Gaussa

O.O. $Z_\alpha = 1.65$



$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{6.28 - 6.10}{0.80 / \sqrt{100}} = 2.25$$

$$Z > 1.65$$

Wniosek: odrzucamy hipotezę zerową

Przykład 2

W 49 pokojach zamku średnia temperatura wynosi:

$$\bar{t} = 20.80^{o}C \quad przy \quad s_t = 0.35^{o}C$$

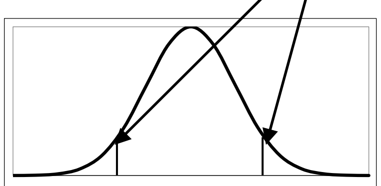
Na czujnikach kontrolnych temperaturę ustawiono na 21ºC. Czy na poziomie istotności α=0.05 możemy stwierdzić, że czujniki pracują poprawnie?

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

T.S. Rozkład Gaussa

R.R. $Z_{\alpha/2} = 1.96$



$$Z = \frac{\bar{t} - \mu_0}{s_t / \sqrt{n}}$$

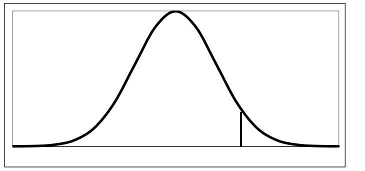
$$Z = \frac{20.80 - 21.00}{0.35 / \sqrt{49}} = -4.0$$

$$|Z| > 1.96$$

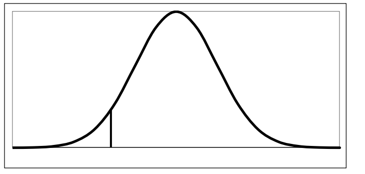
Wniosek: odrzucamy hipotezę zerową

Podsumowanie

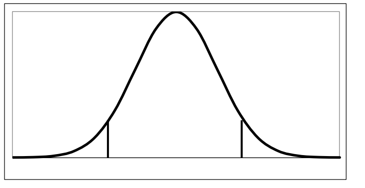
$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad (\mu_0 \ dane)$$



$$H_a : \left.\begin{matrix} 1)\ \mu > \mu_0 \\ 2)\ \mu < \mu_0 \end{matrix}\right\} \ test \ \ jednostromy$$



$$3)\ \mu \neq \mu_0 \quad test \ dwustronny$$



$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

O.O. na poziomie istotności α. H_0 odrzucona, jeżeli:

$$1)\, Z > Z_\alpha$$

$$2)\, Z < Z_\alpha$$

$$3)\, |Z| > Z_{\alpha/2}$$

Błędy I i II rodzaju

Zasady podejmowania decyzji przy testach statystycznych

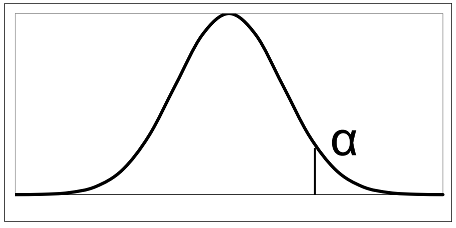
	Stan rzeczywisty	
Decyzja	H_0 prawdziwa	H_0 fałszywa
H_0 odrzucona	Błąd I rodzaju α	Poprawnie: $P=1-\beta$
H_0 nie odrzucona	Poprawnie: $1-\alpha$	Błąd II rodzaju β

α – poziom istotności

$1-\beta$ – moc testu

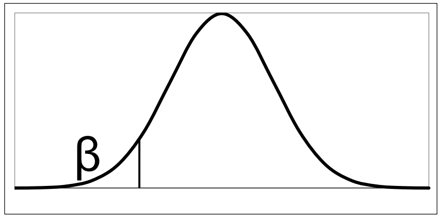
β – prawdopodobieństwo nieodrzucenia fałszywej hipotezy H_0

Hipoteza zerowa H_0



PRZYJĘTA ODRZUCONA

Hipoteza alternatywna H_a



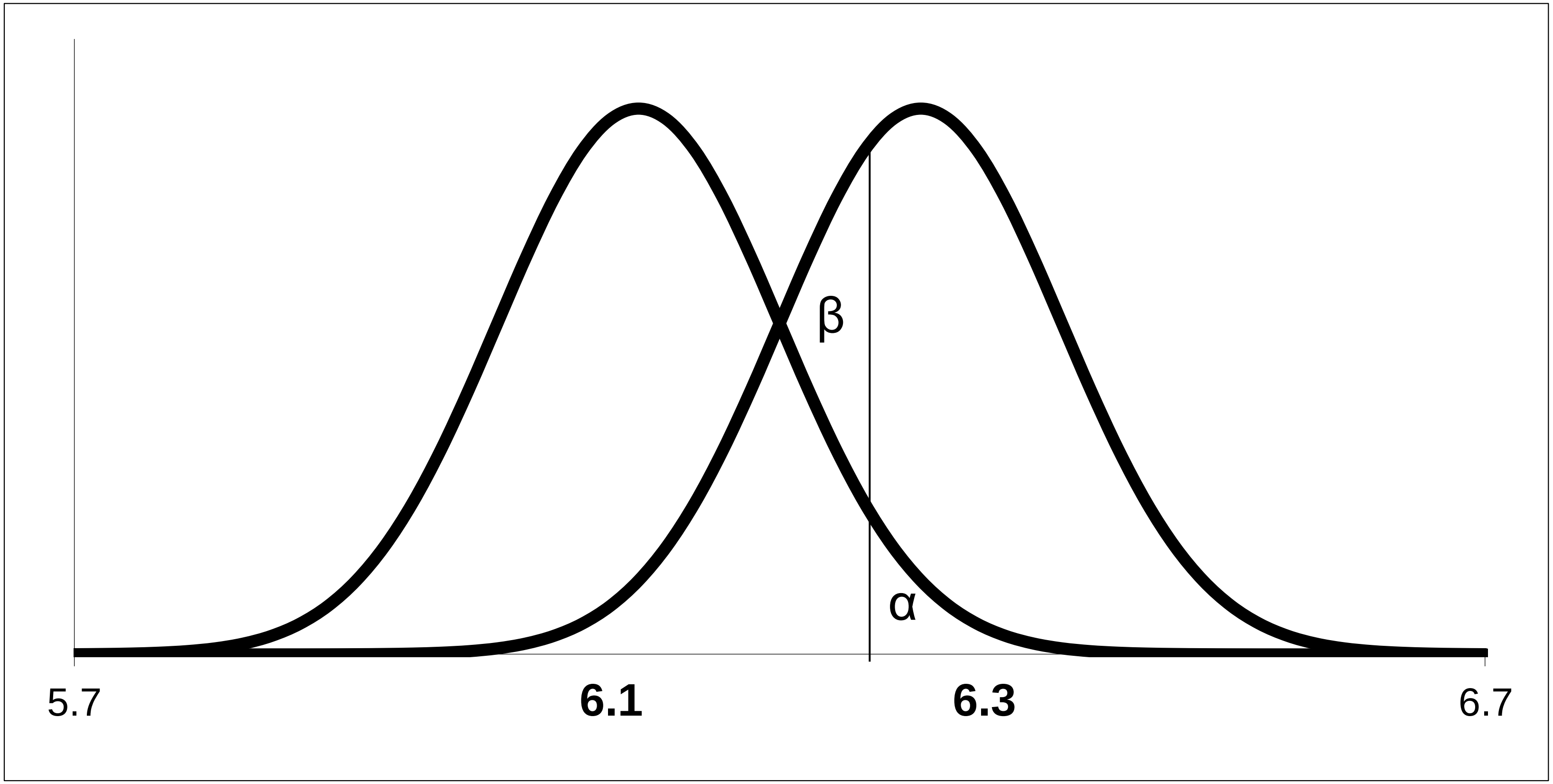
PRZYJĘTA ODRZUCONA

Błędy I i II rodzaju

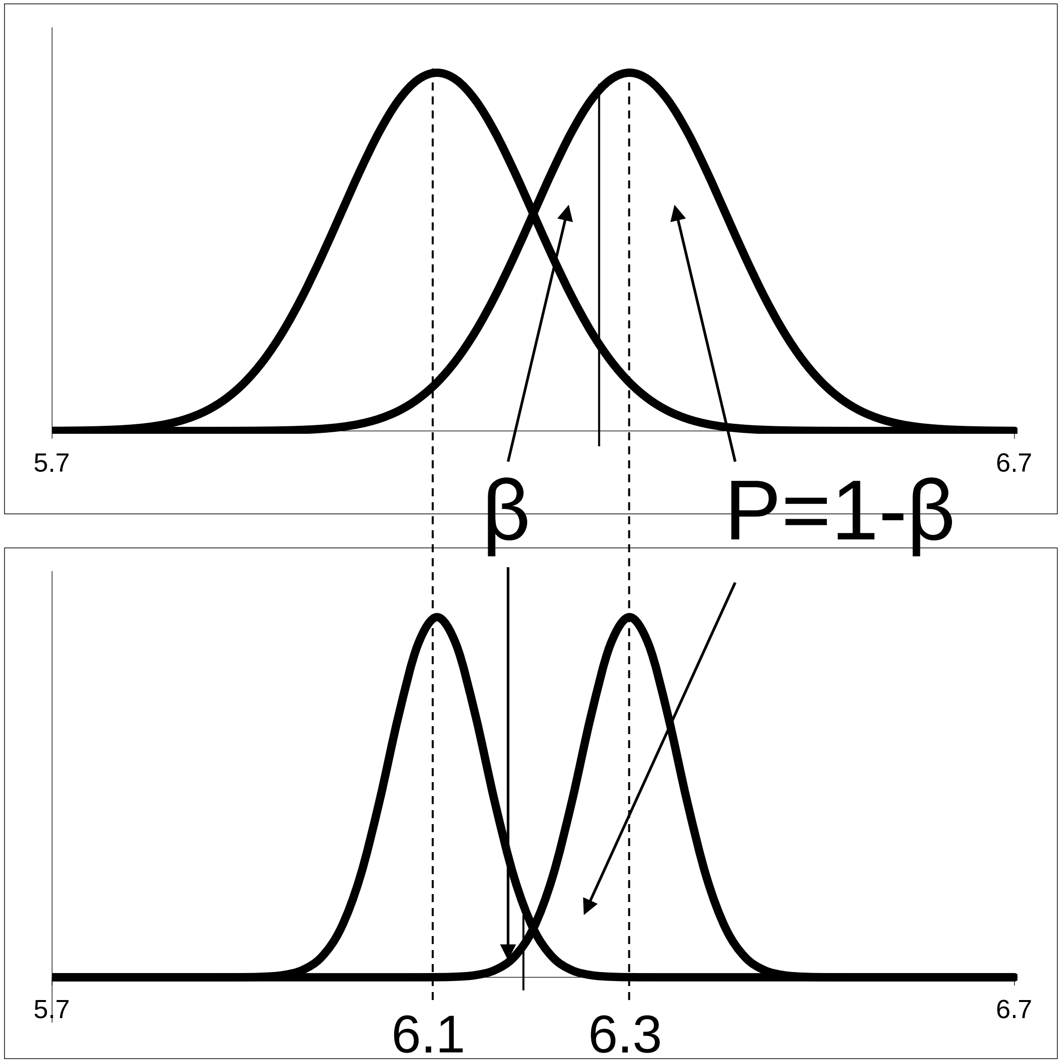
H_0: μ=6.1 H_a: μ=6.3

Odchylenie standardowe średniej σ_x = 0.1

Jak można rozróżnić obie hipotezy?



Jak zwiększyć moc testu?



$\sigma = 1$

$n = 100 \qquad \sigma_x = 0.1$

$n = 400 \qquad \sigma_x = 0.05$